



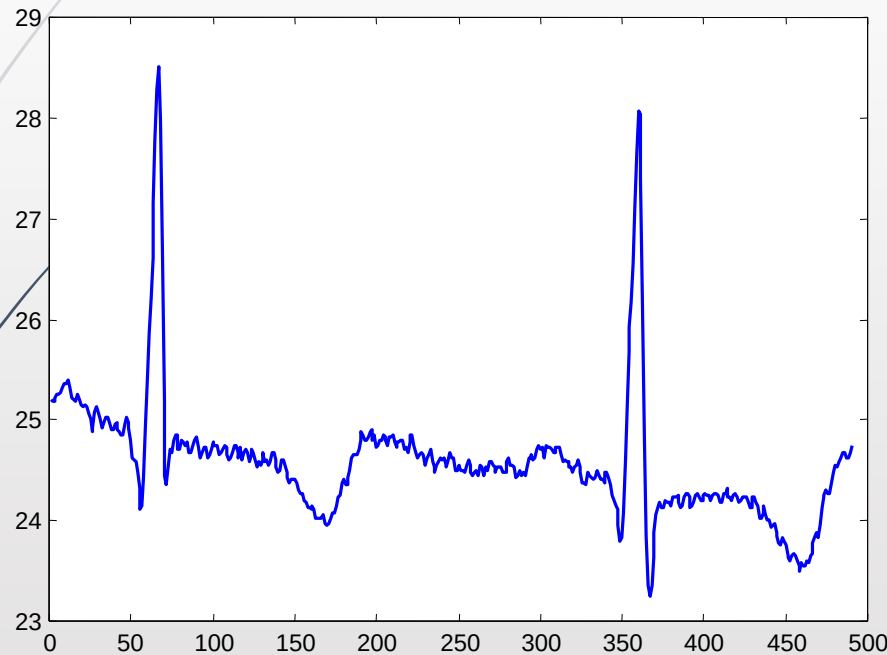
Series temporales

Introducción

What is a Time series ?

2

A time series is a collection of observations made sequentially in time.



A study on random sample of 4000 graphics from 15 of the the world's news papers published between 1974 and 1989 found that more than 75% of all graphics were time series.

Examples: Financial time series, scientific time series

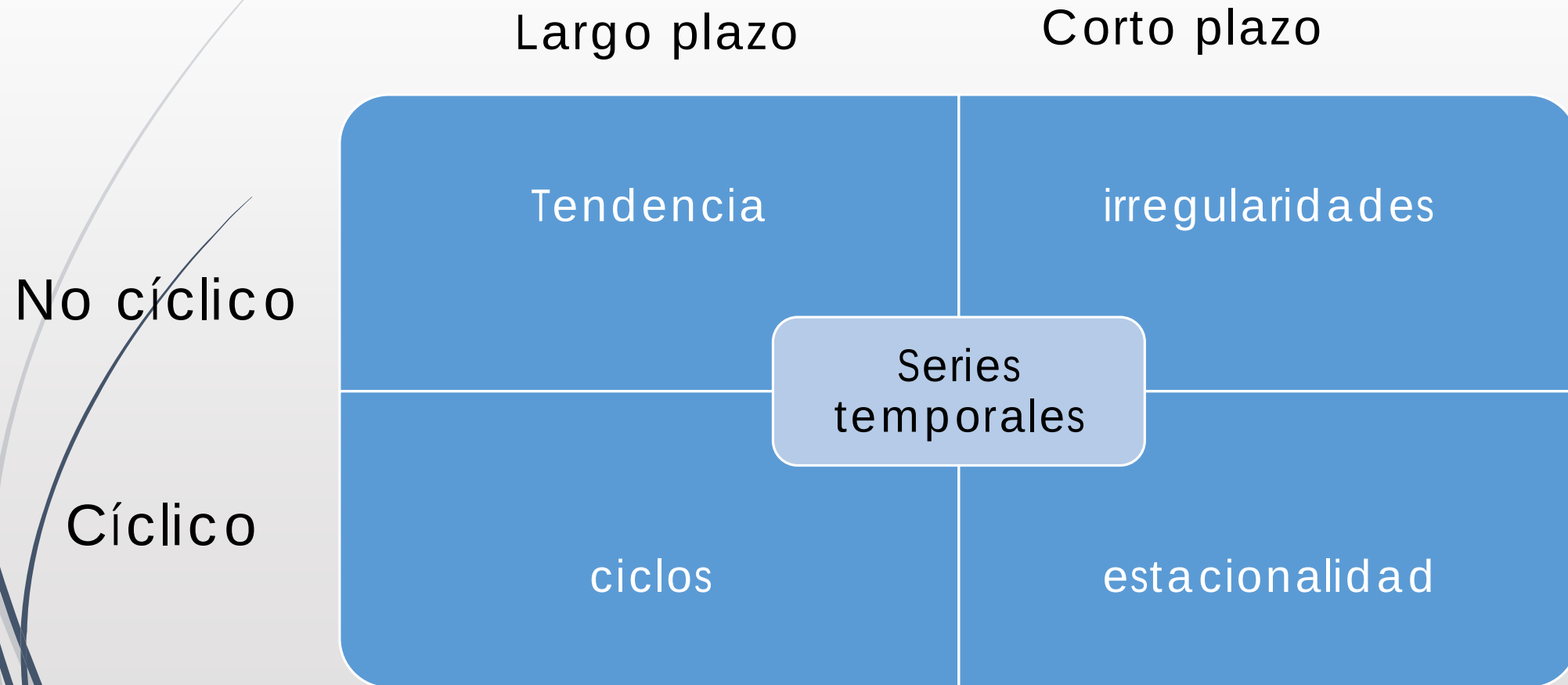
Proceso estocástico:

- Es una sucesión de variables aleatorias en el tiempo [\[1\]](#) $(X_1, \dots, X_T)$. Una serie temporal observada es una realización particular del proceso estocástico, por tanto vendrá determinado por la ley de distribución conjunta $F(x_1, \dots, x_T)$.
- Para simplificar supondremos que las relaciones de dependencia entre las series viene dada por la forma lineal, por consiguiente hablaremos de los procesos lineales
- [\[1\]](#) En realidad el proceso estocástico depende de un índice t cualquiera, pero nos restringiremos al caso en que t represente el tiempo.

Components of a time series

- ▶ The pattern or behavior of the data in a time series has several *components*.
- ▶ Theoretically, any time series can be decomposed into:
 - ▶ Trend
 - ▶ Cyclical
 - ▶ Seasonal
 - ▶ Irregular
- ▶ However, this decomposition is often not straightforward because these factors interact.

Componentes de una serie temporal



Características de una serie

- De una serie tal como hemos visto nos interesa conocer su tendencia futura y su dependencia del pasado
- La primera se mide mediante la esperanza
- La segunda mediante la correlación.
- La relación entre diferentes periodos de la serie viene medida por la autocovarianza
- Para que ambas se puedan calcular de modo eficiente es necesario introducir dos nuevas propiedades:
 - Ergodicidad
 - estacionariedad

Las funciones de autovarianza y autocorrelación

- La función de autocovarianza

$$\gamma_{t,\tau} = \text{Cov}(x_t, x_{t+\tau}) = E[(x_t - \mu_t)(x_{t+\tau} - \mu_{t+\tau})]$$

$$\tau = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

- Función de autocorrelación simple (FAS),

$$\rho_{t,\tau} = \frac{\gamma_{t,\tau}}{\sqrt{\gamma_{t+\tau}\gamma_t}} = \frac{E[(x_t - \mu_t)(x_{t+\tau} - \mu_{t+\tau})]}{\sqrt{E(x_t - \mu_t)^2 E(x_{t+\tau} - \mu_{t+\tau})^2}}$$

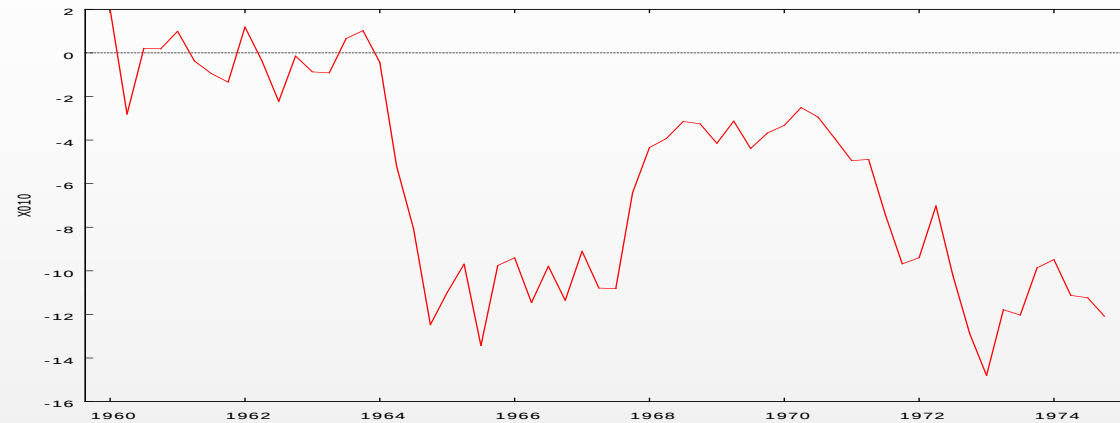
- La función de autocorrelación parcial (FAP) enseña la relación lineal cuando se ha eliminado la correlación que estas variables tienen con otras variables.

$$\phi_{kk} = \text{Corr}(x_t, x_{t-k} \mid x_{t-1}, \dots, x_{t-k+1})$$

Ejemplo de series temporales

Serie

obs	X010	obs	X010
1960:1	1.98439	1967:1	-9.10011
1960:2	-2.80935	1967:2	-10.79088
1960:3	0.21224	1967:3	-10.81863
1960:4	0.18789	1967:4	-6.40931
1961:1	0.99197	1968:1	-4.34395
1961:2	-0.37202	1968:2	-3.92952
1961:3	-0.94561	1968:3	-3.14838
1961:4	-1.34302	1968:4	-3.25471
1962:1	1.18731	1969:1	-4.14822
1962:2	-0.35364	1969:2	-3.12886
1962:3	-2.22765	1969:3	-4.38795
1962:4	-0.14332	1969:4	-3.67496
1963:1	-0.87156	1970:1	-3.32477
1963:2	-0.91728	1970:2	-2.50742
1963:3	0.65907	1970:3	-2.94481
1963:4	1.02235	1970:4	-3.93522
1964:1	-0.43407	1971:1	-4.94466
1964:2	-5.20927	1971:2	-4.88826
1964:3	-8.06903	1971:3	-7.43227
1964:4	-12.47403	1971:4	-9.68089
1965:1	-10.99036	1972:1	-9.39965
1965:2	-9.69162	1972:2	-7.01989
1965:3	-13.43302	1972:3	-10.20790
1965:4	-9.75322	1972:4	-12.87819
1966:1	-9.40226	1973:1	-14.80119
1966:2	-11.45938	1973:2	-11.78397
1966:3	-9.78730	1973:3	-12.03093
1966:4	-11.35468	1973:4	-9.86220
		1974:1	-9.48417
		1974:2	-11.12687
		1974:3	-11.23447
		1974:4	-12.08659



Autocorrelacion

RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q. [valor p]
1	0.8695	***	0.8695	***	47.6692 [0.000]
2	0.7802	***	0.0991		86.7139 [0.000]
3	0.6778	***	-0.0808		116.6999 [0.000]
4	0.5752	***	-0.0735		138.6790 [0.000]
5	0.4795	***	-0.0370		154.2330 [0.000]
6	0.3718	***	-0.1071		163.7549 [0.000]
7	0.2767	**	-0.0395		169.1288 [0.000]
8	0.1759		-0.0842		171.3421 [0.000]
9	0.0461		-0.2160	*	171.4972 [0.000]
10	-0.0629		-0.0699		171.7912 [0.000]
11	-0.1384		0.0636		173.2462 [0.000]
12	-0.2265	*	-0.1133		177.2231 [0.000]

Ergodicidad

- ▶ La idea intuitiva es que cuanto más nos alejemos en el tiempo, menos influencia tenemos sobre la observación del período.
- ▶ A largo plazo un determinado evento o ocurre o no ocurre (con probabilidad 1 y 0 respectivamente) independiente de la situación actual.
- ▶ Esta propiedad asegura que los momentos muestrales converjan a los poblacionales cuando crece el tamaño de la muestra.
- ▶ La relación entre dos variables aleatorias de un proceso es más débil cuando las variables son más lejanas en el tiempo.
- ▶ Al aumentar el número de observaciones de la serie temporal aumenta el número de covarianzas, pero no el número de parámetros de estimar.

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \gamma_{\tau} = 0$$

Estacionariedad

- El efecto del pasado, sólo depende del retardo, pero no del instante de tiempo en el que se analiza. Es decir que si existe efecto del periodo anterior, dicho efecto es el mismo en cualquier instante en el que se mida. Es por consiguiente estable.
- Un proceso estocástico es **estacionario** en sentido *estricto* o fuerte cuando la distribución de probabilidad conjunta de cualquier parte de la secuencia de variables aleatorias es invariante del tiempo.

$$F(x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+k}) = F(x_{t+\tau}, x_{t+1+\tau}, \dots, x_{t+k+\tau})$$

Características de una serie bajo estacionariedad

- La estacionariedad permite asegurar que las características de la serie no dependen del momento de tiempo en el que se analicen, por tanto:

- $E(X_t) = E(X)$, para cualquier t
- $\text{Var}(X_t) = \text{var}(X)$, para cualquier t
- $\text{cov}(X_t, X_{t-s}) = \text{cov}(X_{s+1}, X_1)$ para cualquier t y s . Esta se denomina autocovarianza de orden s

$$\gamma_\tau = E[(x_t - \mu)(x_{t+\tau} - \mu)] \quad \gamma_k = \gamma_{-k}$$

- $\text{cor}(X_t, X_{t-s}) = \text{cor}(X_{s+1}, X_1)$ para cualquier t y s . Esta se denomina autocorrelación de orden s

$$\rho_\tau = \frac{\gamma_\tau}{\gamma_0} = \frac{E[(x_t - \mu)(x_{t+\tau} - \mu)]}{E(x_t - \mu)^2}$$

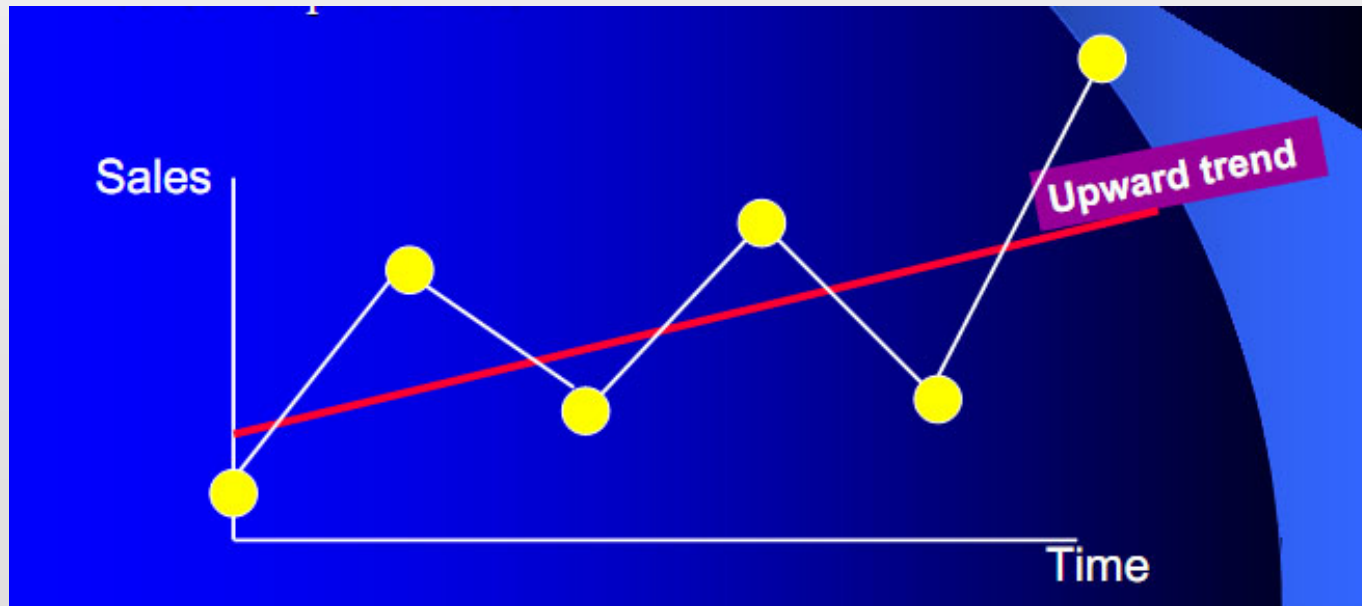
Invertibilidad

- ▶ Cuando el efecto del pasado es cada vez mas débil, y no genere proceso explosivos
- ▶ La condición de invertibilidad asegura que un proceso que es una suma de información específica de cada periodo, se puede transformar en un proceso donde la información se recoge en el pasado de la propia serie, de tal forma que esa información es mas débil a medida que nos alejamos del momento en el que se produce

La tendencia

13

- La componente de la tendencia mide el cambio gradual de la serie hacia valores relativamente mas altos o mas bajos durante un periodo de tiempo largo
- Normalmente, es el resultado de factores de largo plazo, como cambios en la población, en la tecnología o en los gustos de los consumidores
- La tendencia puede ser determinística o aleatoria.
 - La determinística se considera que es función del tiempo;
 - la aleatoria se comporta como un proceso estocástico.



Tendencia determinística

- sólo trata de recoger las variaciones sistemáticas en un período.
- Se produce cuando la media de la serie depende funcionalmente de una variable temporal:

$$T_t = g(t)$$

Donde $g(t)$ puede ser cualquier función

la variación de la tendencia indica el cambio y es

$$\Delta T_t \approx \frac{\partial}{\partial t} g(t)$$

la tasa de crecimiento indica la velocidad a la que crece

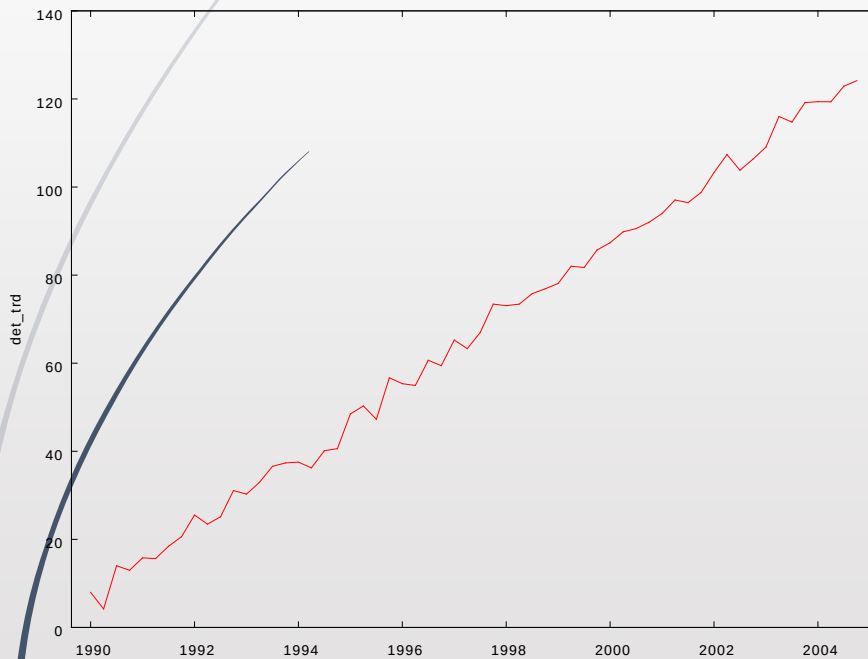
$$\frac{\Delta T_t}{T_t} \approx \frac{\partial}{\partial t} \ln g(t)$$

Tipos de tendencias determinísticas

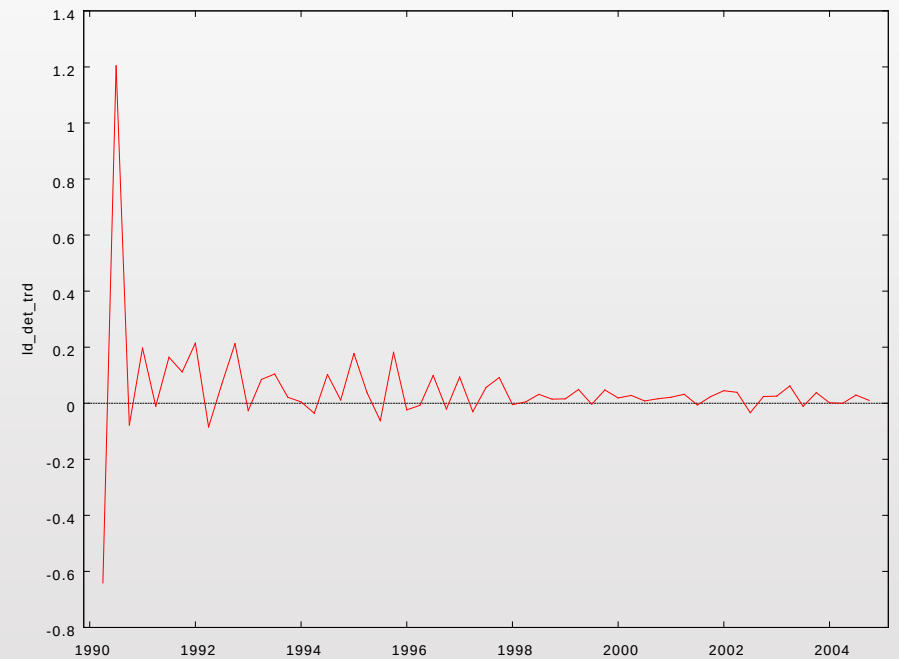
Tendencia	variación	crecimiento	función
Lineal	Constante	Positivo-decreciendo o negativo creciendo $T_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_k t^k$	$T = \alpha + \beta t$
Polinómica	Es constante en el orden k	Positivo-decreciendo o negativo creciendo $T_t = \alpha e^{\beta t}$	$\Delta^k T_t = \alpha_k$
Exponencial	exponencial	Constante	
logarítmica	decreciente	decreciente	$T = \alpha + \beta \ln t$
Doble-logarítmica	Depende de los parámetros	Depende de los parámetros	$T = \alpha t^\beta$

Ejemplo de serie con tendencia determinística

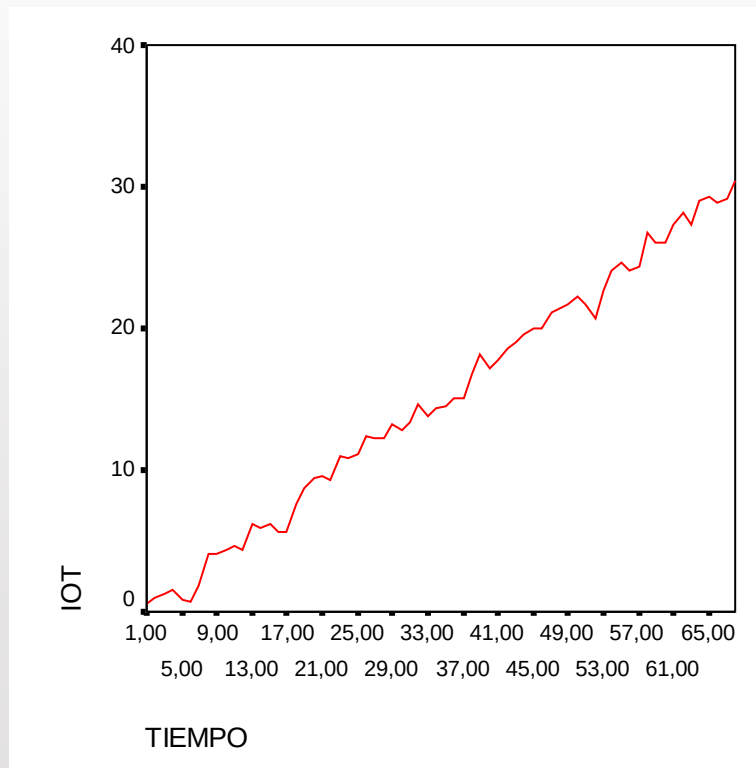
Serie original



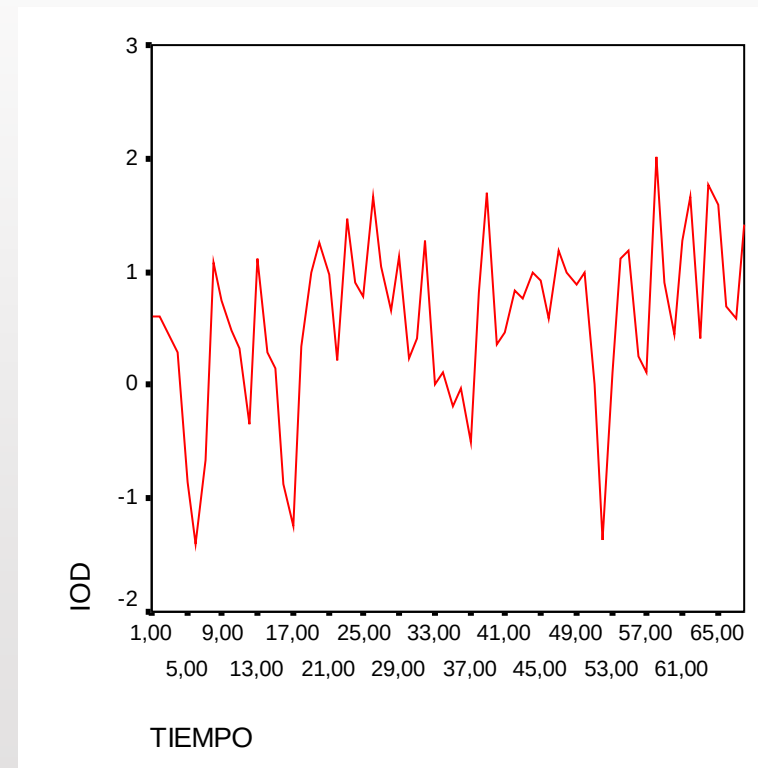
Tasa de crecimiento



Ejemplos de tendencia determinista y de deriva



$$Y_t = a + bt + u_t$$



$$Y_t = a + u_t$$

Tendencia estocástica

- Se obtiene como consecuencia de la evolución de la serie con raíces unitarias, de forma que la media se mantiene constante pero la varianza tiende a infinito.
- Permite una variación mayor de la serie, pues no determina exactamente el comportamiento a largo plazo de ésta, y en consecuencia el proceso es más imprevisible.
- La tendencia determinística siempre domina a la estocástica en su comportamiento a largo plazo, cuando existen ambas en la serie.
- *Ejemplo: Paseo aleatorio :*

$$T_t = T_{t-1} + e_t$$

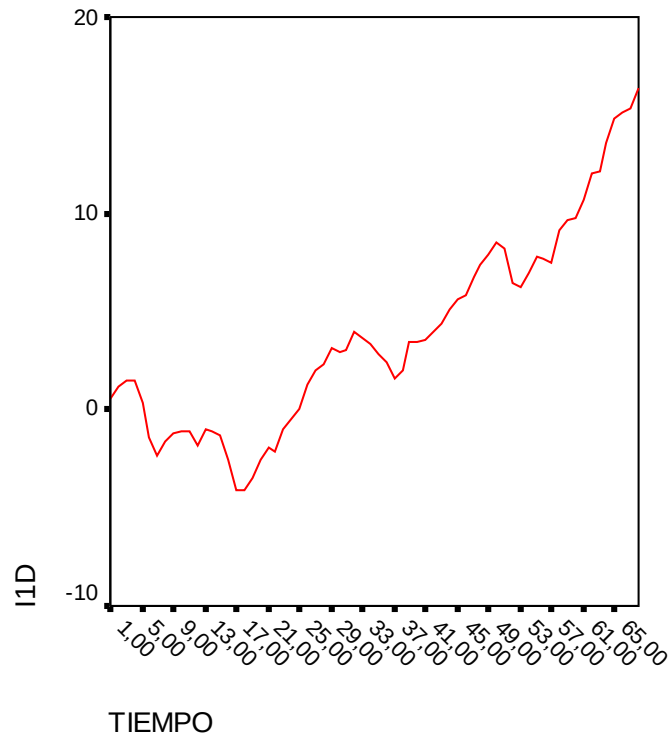
El concepto de memoria

- Una serie se dice que no tiene memoria si no depende de su pasado
- Si medimos la relación con la covarianza, se dice que no tiene memoria si
$$\text{Cov}(X_t, X_{t-s})=0 \text{ para cualquier } t \neq s$$
- Una serie se dice que tiene *memoria corta* si el efecto de la serie a largo plazo tiende a ser constante y perfectamente determinado. Por tanto existe un valor constante μ tal que

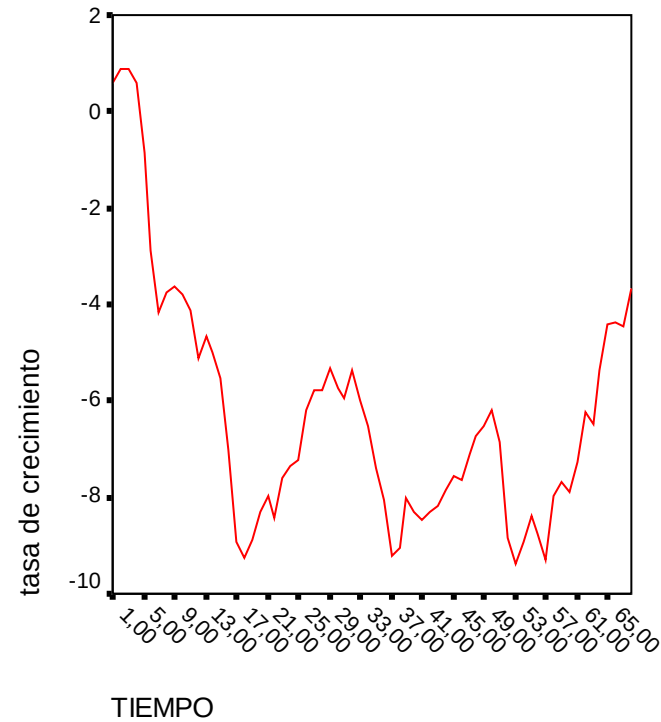
$$\text{plim}_{t \rightarrow \infty} (x_t - \mu) = 0$$

- En caso contrario es de *memoria larga*
- Una serie es integrable de orden d si $\Delta^j X_t$ es de memoria larga para todo $j < d$ y es de memoria corta para $j = d$

Ejemplos de tendencia estocástica con y sin deriva

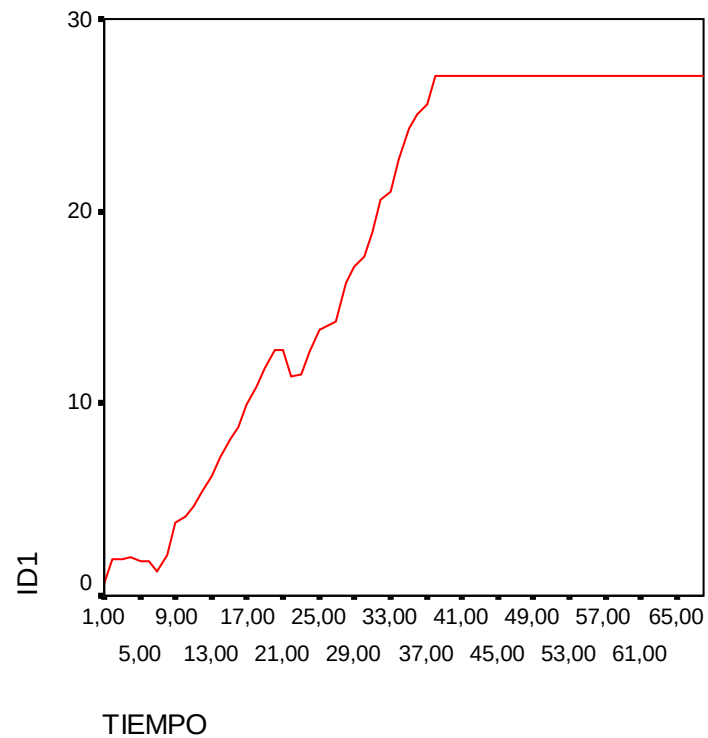


$$Y_t = a + S_t$$

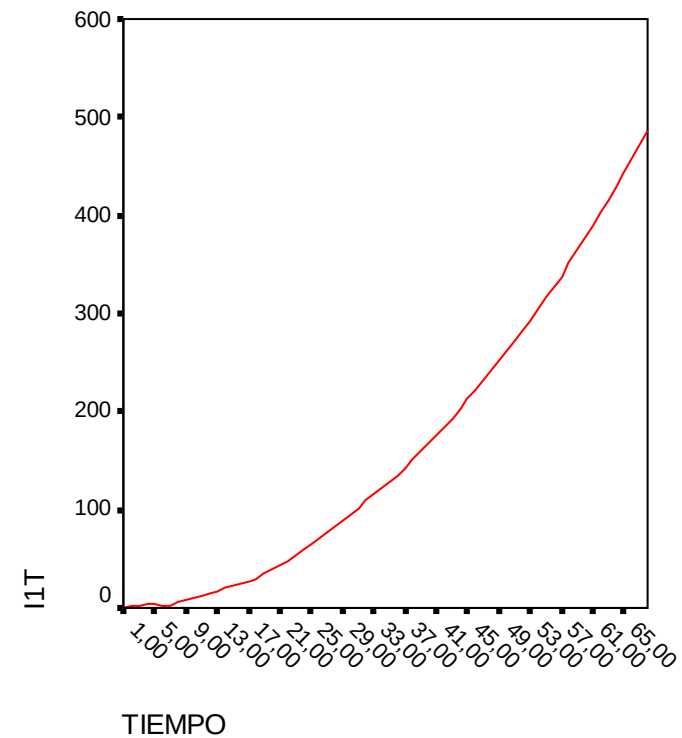


$$Y_t = S_t$$

Ejemplos de combinación de tendencia estocástica y determinista

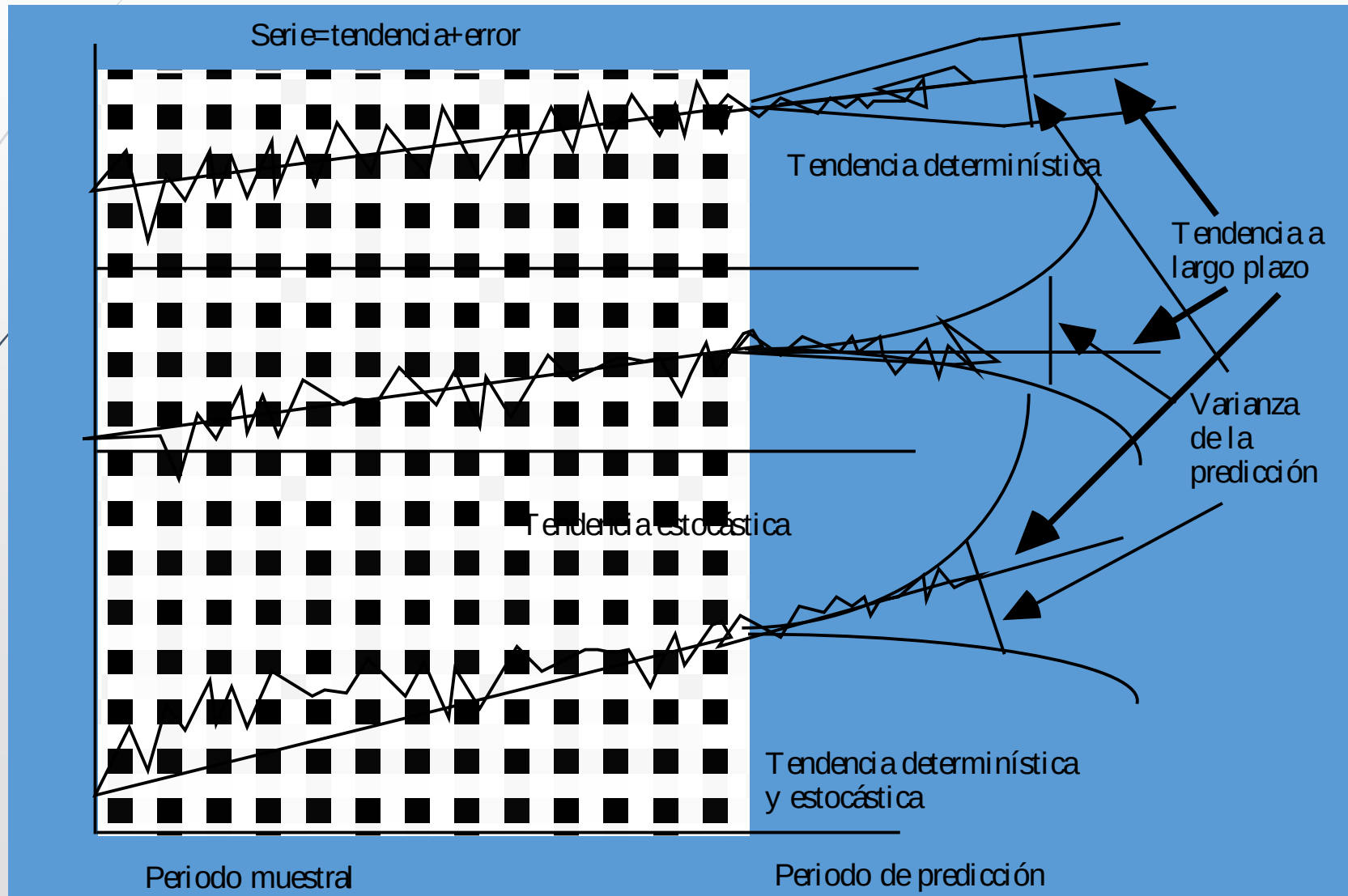


$$\Delta Y_t = a + u_t$$



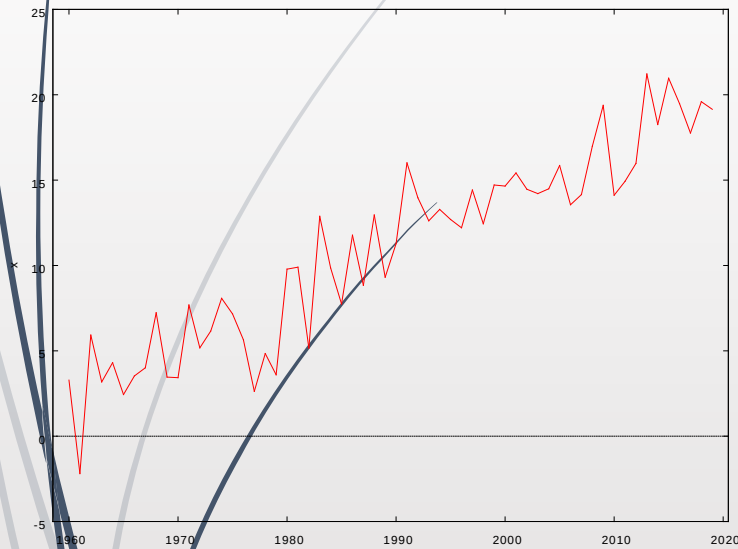
$$Y_t = a + bt + S u_t$$

Comparación de tendencias

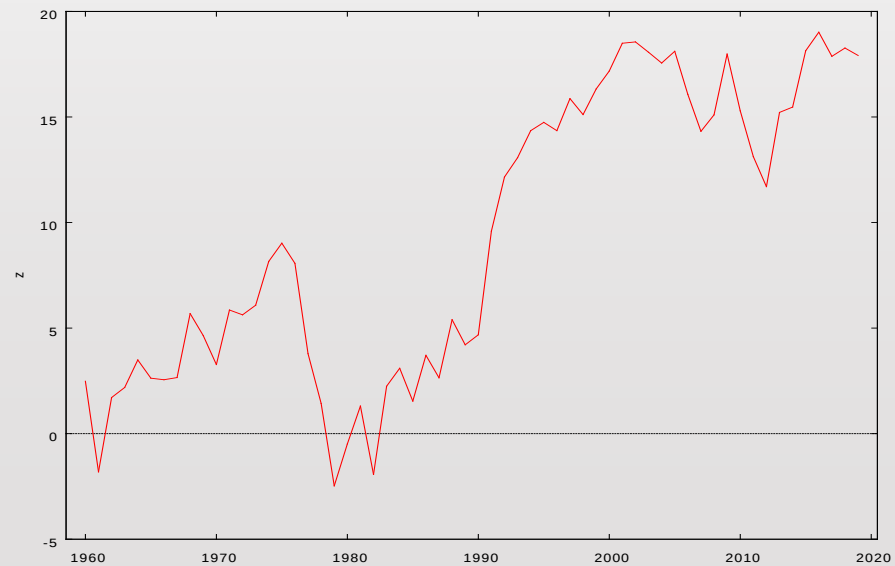


Gráficos de tendencias

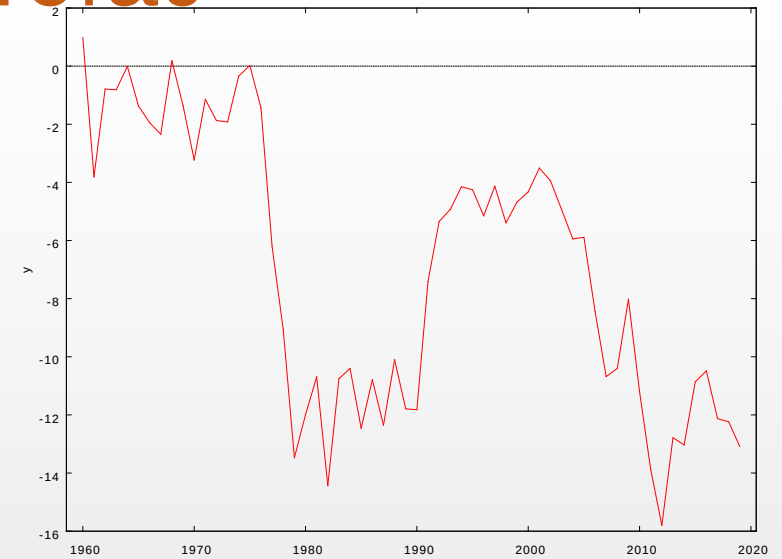
Tendencia
determinística



**Tendencia
determinística y
aleatoria**

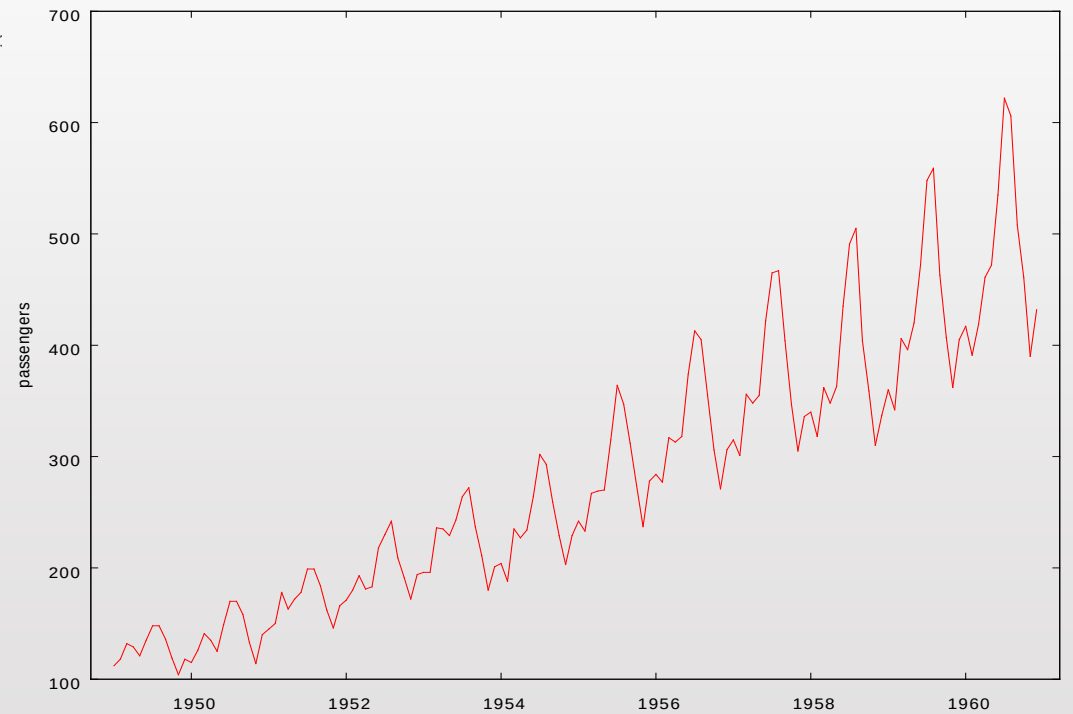
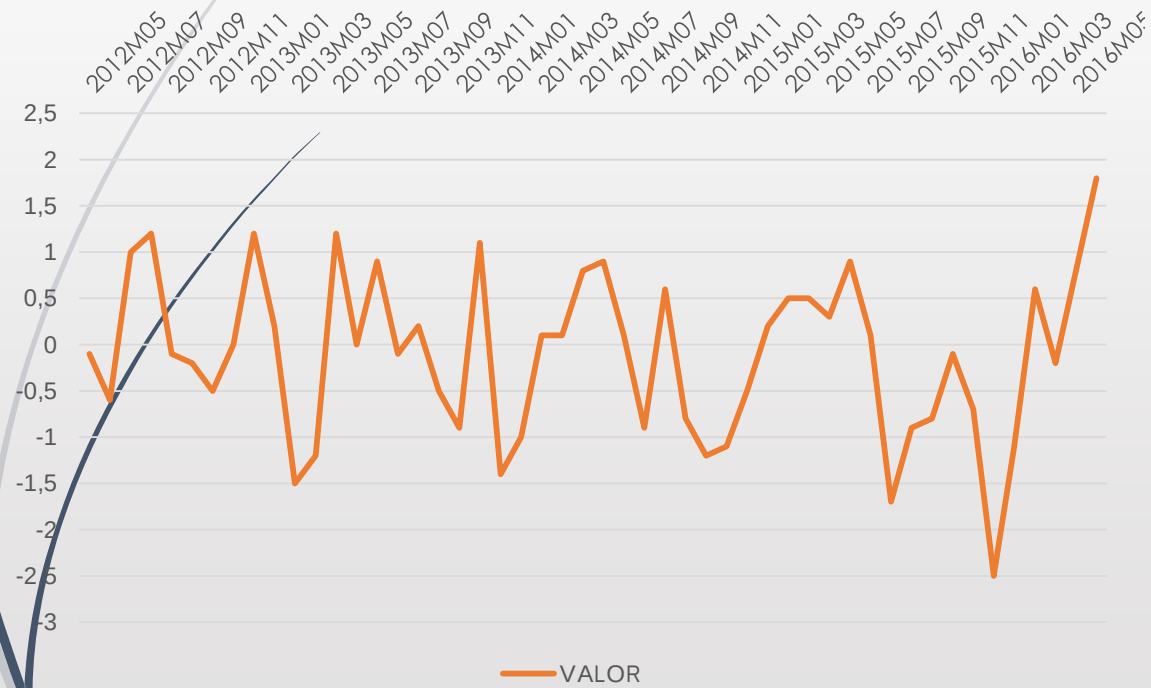


Tendencia
aleatoria



Ejemplos

Variación del Índice de precios industriales



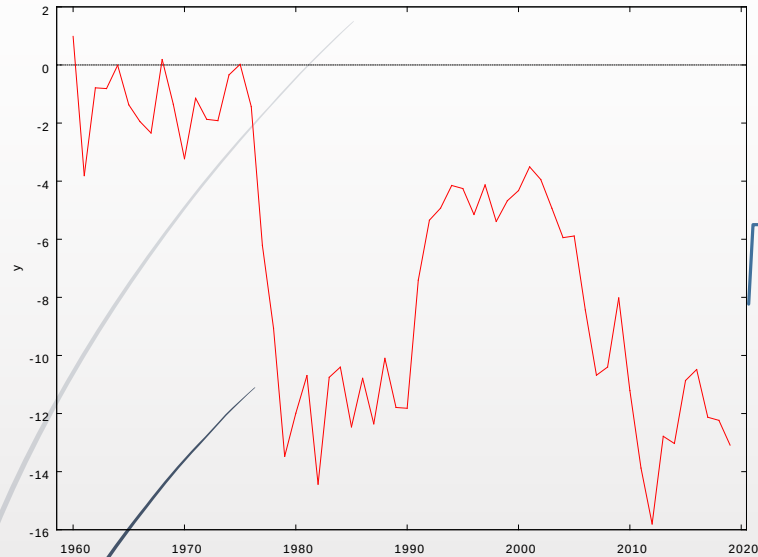
El operador diferencia

- Operador retardo L , retarda una serie un periodo: $LX_t = X_{t-1}$
- Operador diferencia Δ indica el cambio de un periodo a otro:

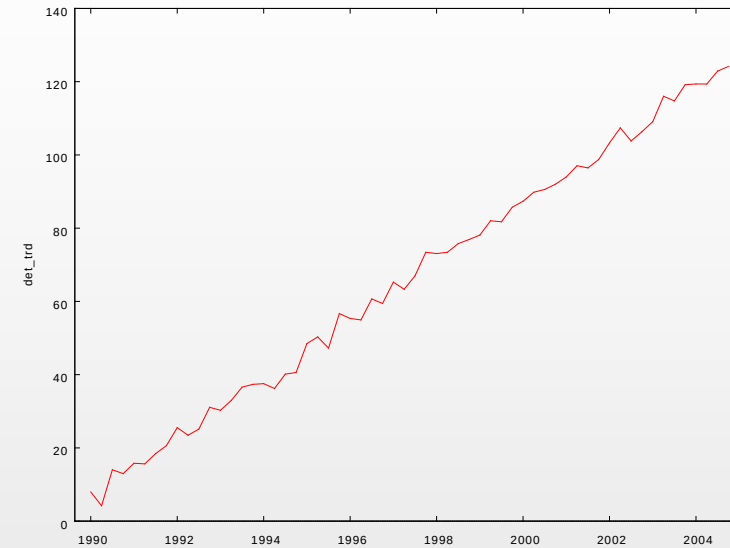
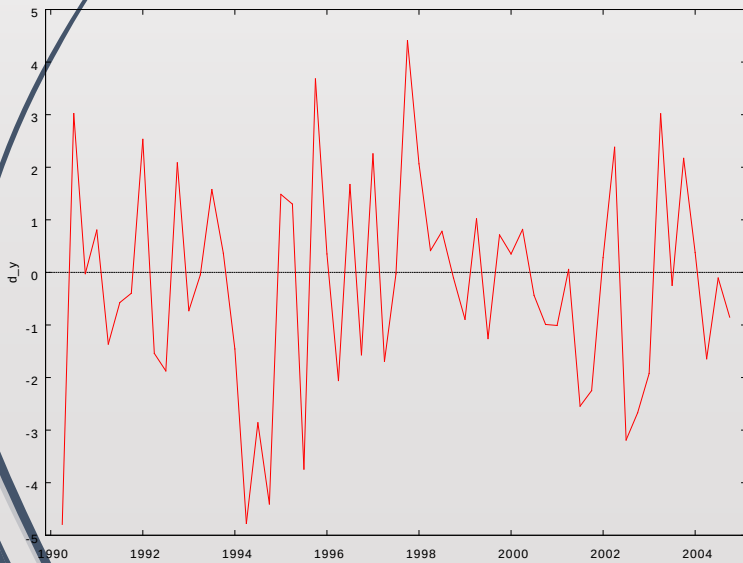
$$\Delta X_t = (1 - L)X_t = X_t - X_{t-1}$$

- Permite reducir la tendencia de una serie cuando esta tiene tendencia estocástica, puesto que nos dice cuanto cambia la serie, algo similar a la velocidad
- También reduce la tendencia determinística, pero genera sobrediferenciación en la parte aleatoria, produciendo un efecto de incremento de la varianza y del error
- Por ello es importante analizar la tendencia de la serie antes de aplicar el operador

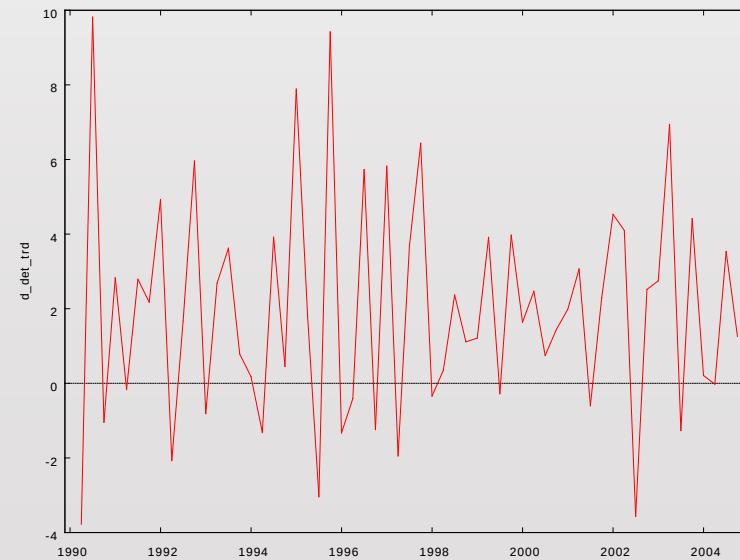
Ejemplos



Tendencia
estocástica
. La serie
diferenciada
a varia
entre -5 y 5



Tendencia
determinística. La serie
diferenciada
a varia
entre -4 y
10, el doble
de la
anterior





La integración de series

- La operación inversa a la diferenciación se denomina integración
- Para definirla se parte del concepto de series integradas de orden 0, que representaremos por $I(0)$, que intuitivamente asumiremos que son las series estacionarias.
- Por integración se van obteniendo distintos conceptos de series
- Una serie se dice integrada de orden d si su diferenciación de orden d es estacionaria

Series estacionarias $I(0)$

1. Series estacionarias
 1. $E(x_t) = \mu < \infty$
 2. $\text{Var}(x_t) = \sigma^2 < \infty$.
2. Una innovación tiene un efecto temporal sobre x_t ; existe una atracción por parte de la media que representaría el punto de equilibrio a largo plazo. $x_t \approx \mu$.
3. La longitud esperada del tiempo de espera para cruzar el valor medio μ es finita.
4. Las autocorrelaciones r_k de la serie decaen exponencialmente a partir de un k y su suma es finita.
 1. Cuando $\mu \neq 0$ se dice que la serie tiene *deriva*: esto es, puede existir una cierta tendencia pero convergen a una media constante.
5. Si x_t e y_t son $I(0)$ y a, b escalares distintos de 0, entonces $ax_t + bY_t$ es $I(0)$

Series integradas I(1)

1. Series no estacionarias

1. $E(x_t) = \mu_t < \infty$, si Existe $E(X_t) = \sum_{s=-\infty}^t E(Z_s) = \mu_t \neq 0$ salvo que $E(Z_s) = 0 \forall s$
2. $\text{Var}(x_t) \rightarrow \infty$.

2. Una innovación tiene un efecto permanente sobre x_t .

3. La longitud esperada del tiempo de espera para cruzar el valor medio μ es infinita.

4. Las autocorrelaciones r_k de la serie tienden a 1.

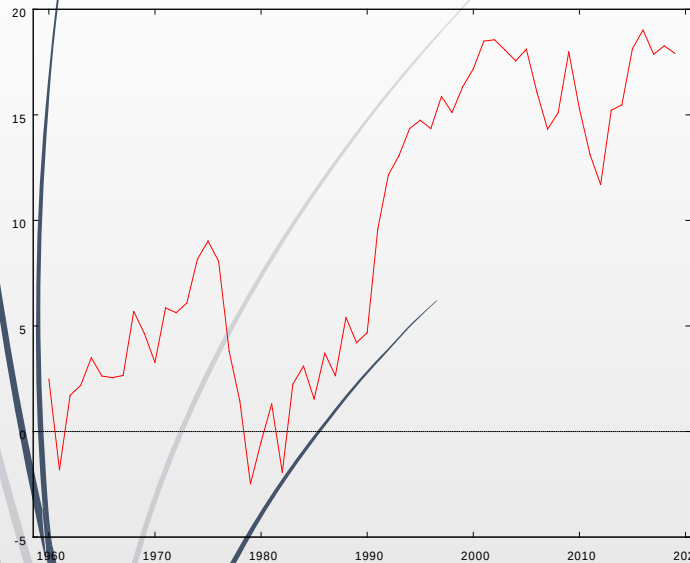
5. Si x_t e y_t son $I(0)$ y a, b escalares distintos de 0, entonces $ax_t + by_t$ como máximo es $I(1)$, pero puede ser $I(0)$. Si Y_t es constante es $I(1)$

Series sobre diferenciadas I(-1)

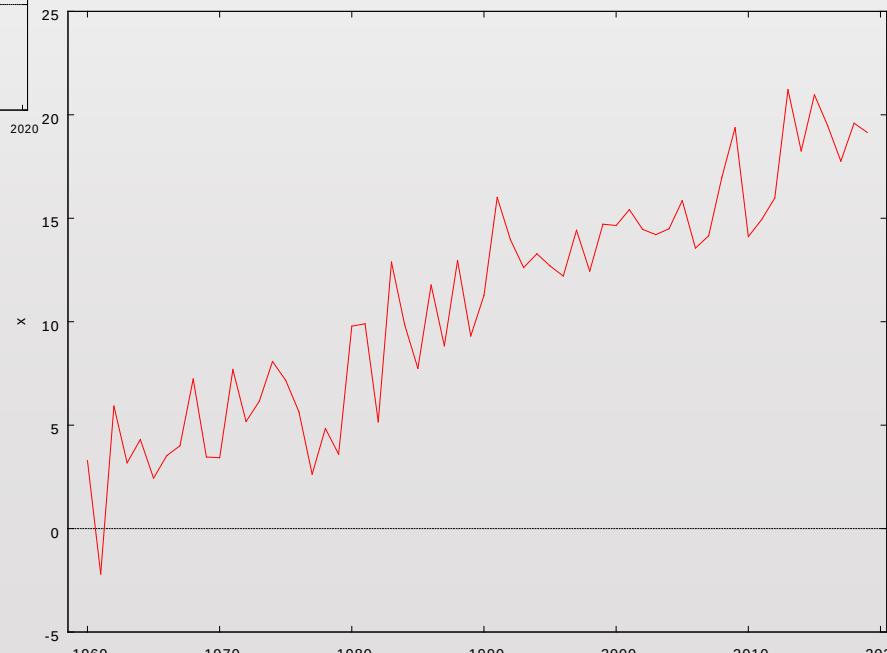
1. Series estacionarias
 1. $E(x_t)=0$ aunque haya deriva
 2. $\text{Var}(x_t)$ se incrementa respecto a la serie sin diferenciar
2. Una innovación tiene un efecto permanente sobre x_t .
3. Deja de ser invertible la serie

Gráficos de tendencias

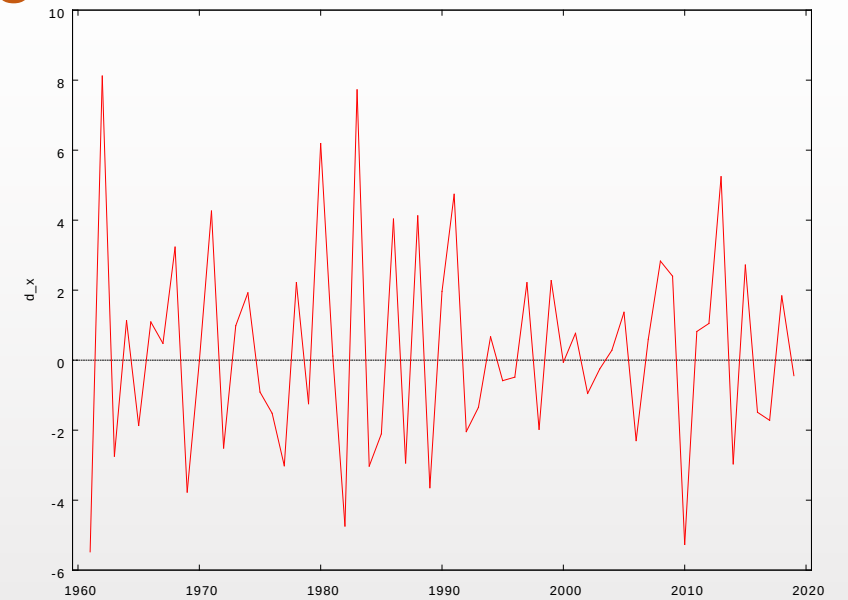
Serie I(1)



Serie I(0)



Serie I(-1)





Comparación entre series $I(1)$ e $I(0)$

- De las propiedades anteriores se llega a la siguiente conclusión:
- las series $I(1)$ son dominantes respecto a las series $I(0)$.
- De hecho, las series $I(1)$ miden, generalmente, procesos de acumulación de cambios, de ahí que las denominaremos *niveles*, mientras que la $I(0)$ miden cambios simples, las denominaremos *incrementos*.



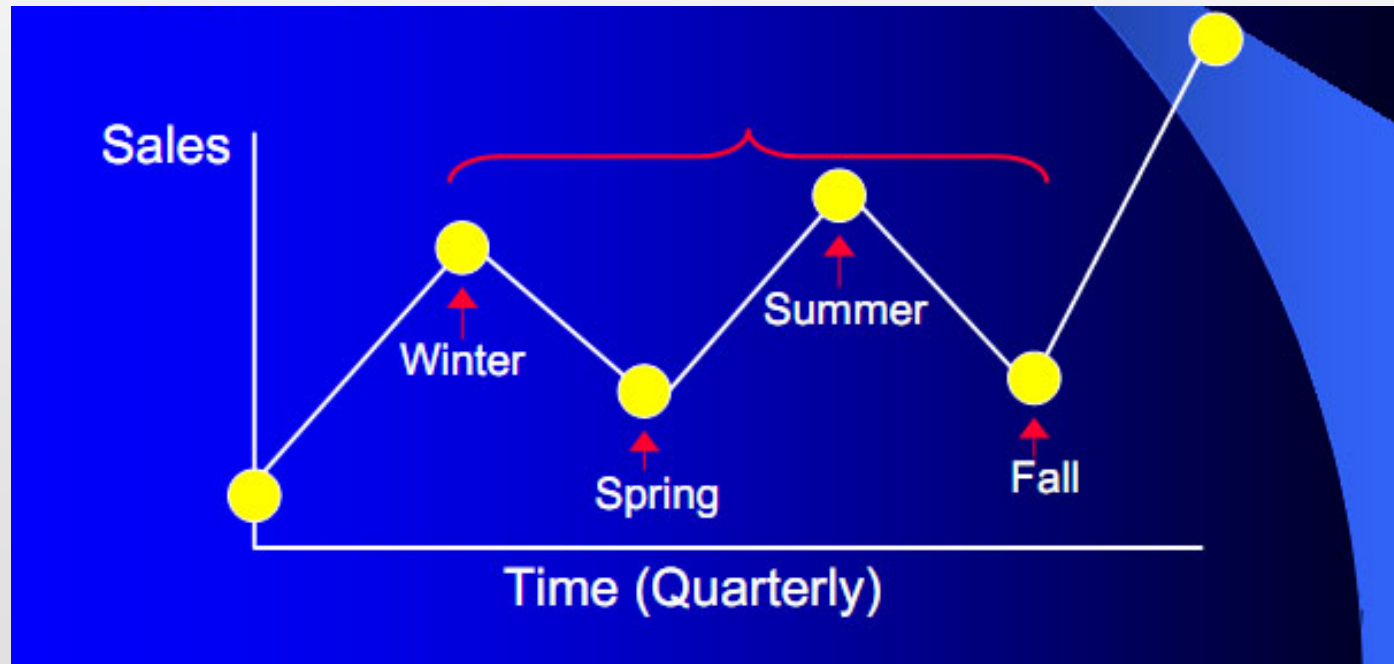
Ciclos

- miden las oscilaciones a corto y a medio plazo alrededor de la tendencia.
- Se consideran funciones sinusoidales del tiempo
- Tanto la componente cíclica como la estacional son ciclos:
 - Cuando son menos de un año se denominan estacionalidad
 - Cuando son superiores a un año se le considera componente cíclica

Seasonal component

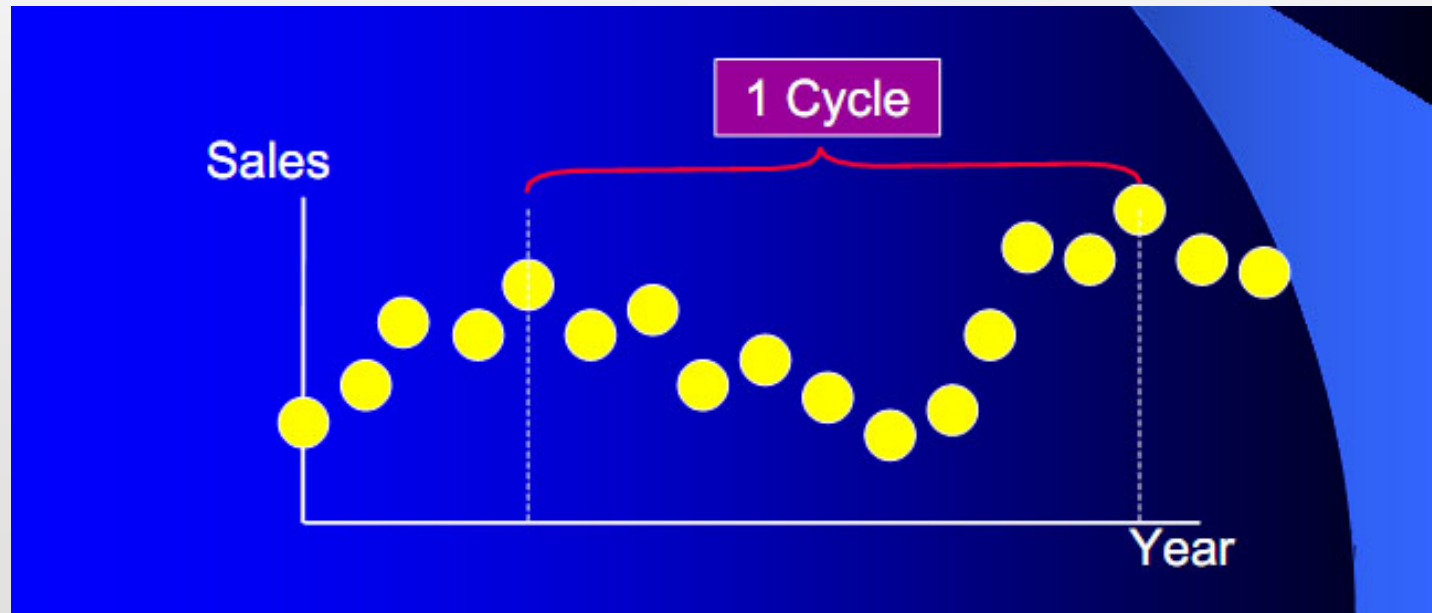
34

- ▶ The seasonal component accounts for regular patterns of variability within certain time periods, such as a year.
- ▶ The variability does not always correspond with the seasons of the year (i.e. winter, spring, summer, fall).
- ▶ There can be, for example, within-week or within-day “seasonal” behavior.



Cyclical component

- Any regular pattern of sequences of values above and below the trend line lasting more than one year can be attributed to the *cyclical component*.
- Usually, this component is due to multiyear cyclical movements in the economy.



Tipos de Ciclos

- ▶ En ambos casos los ciclos pueden ser:

- ▶ Determinísticos:

- ▶ siguen una función conocida

- ▶ Estocásticos

- ▶ Son consecuencia de una diferenciación de orden s

$$\Delta^s = (1-L)^s = (1-L)(1+L+L^2+\dots+L^{s-1})$$

- ▶ Esa diferenciación se descompone en dos elementos:

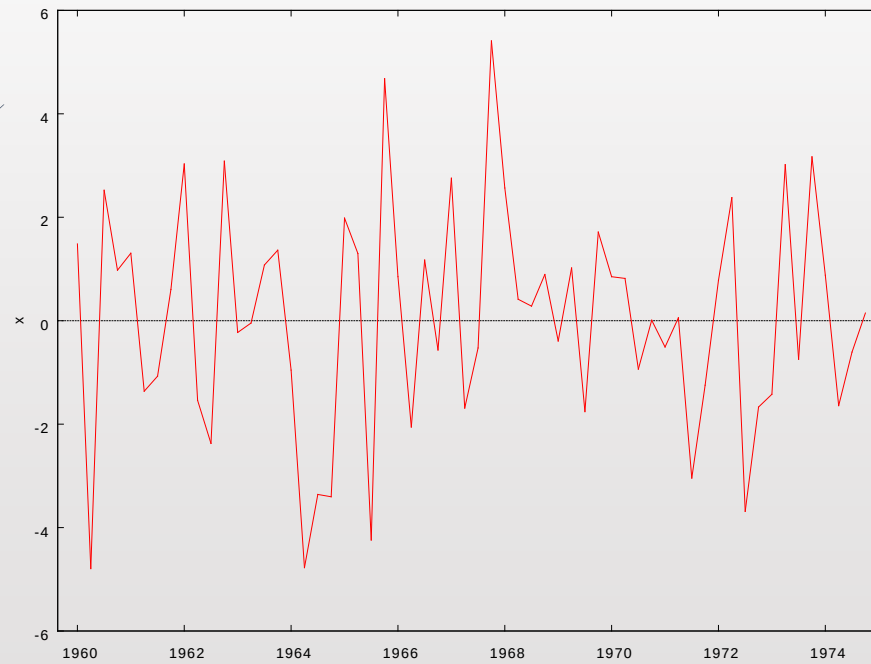
- ▶ Una tendencia normal

- ▶ Y una parte estacional correspondiente a la media móvil de orden s .

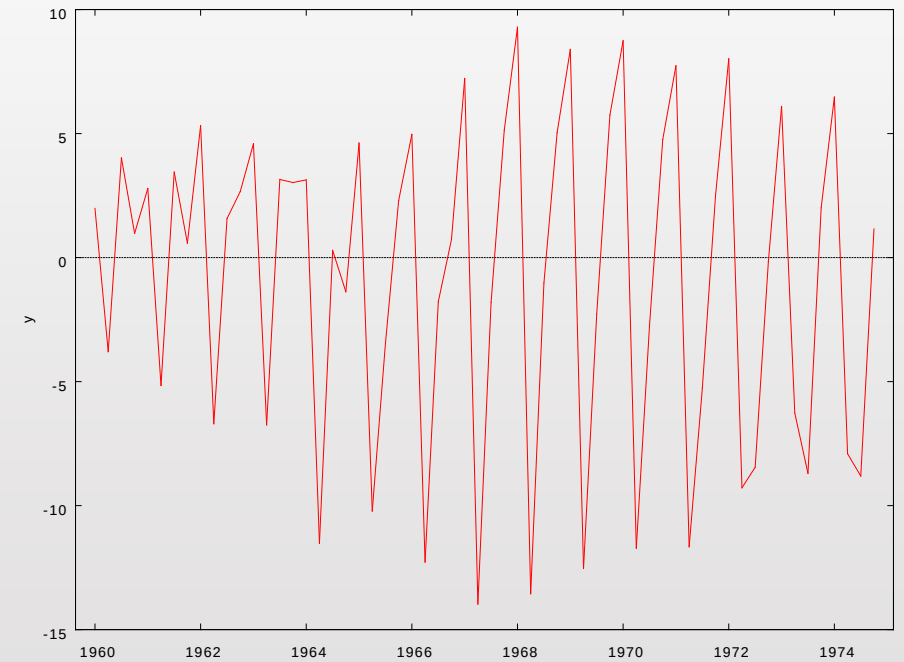
- ▶ Esta última es en la que se destaca la especificidad de la tendencia estacional estocástica

Gráficos de ciclos

Ciclo determinístico



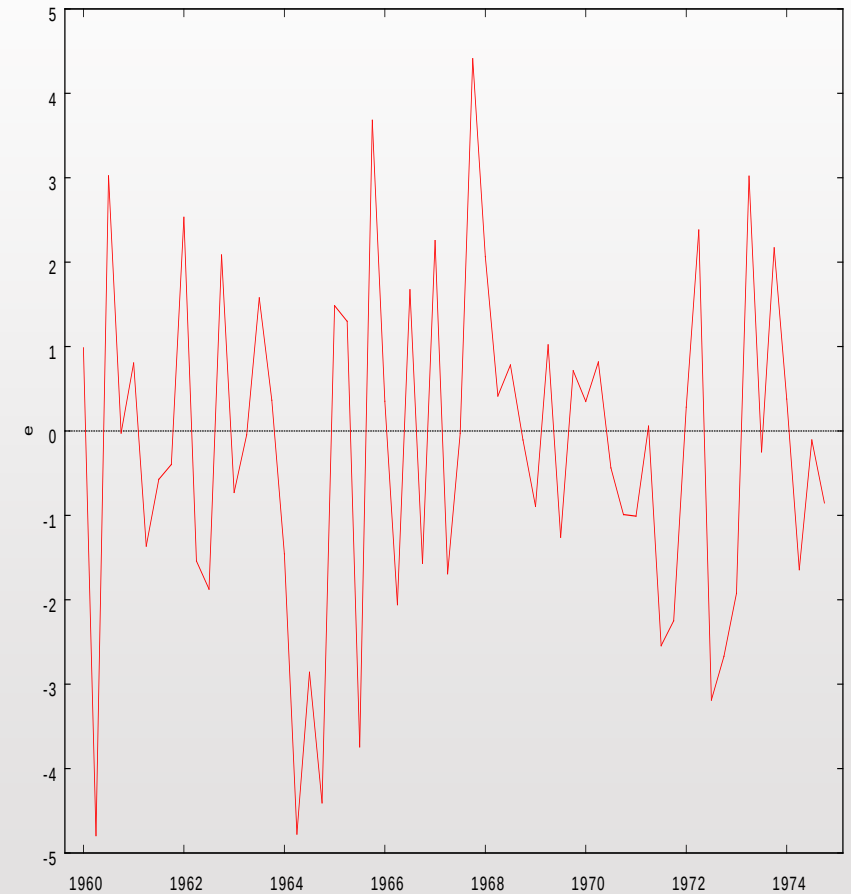
Ciclo estocástico



Parte irregular

- ▶ Se supone que es estacionaria
- ▶ Cuando no puede dar más información se define como ruido blanco
- ▶ Propiedades del ruido blanco
 - ▶ Media nula
 - ▶ Varianza constante
 - ▶ Independiente del pasado (autocorrelaciones nulas)
- ▶ Se suele simplificar mediante procesos lineales.

Ruido Blanco





Procesos lineales

Modelos ARIMA

Procesos de ruido blanco

Definición:

→ $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^T$ es un proceso estocástico de ruido blanco si;

$$\begin{cases} E(\varepsilon_t) = 0 & \text{para todos } t \\ E(\varepsilon_t^2) = V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 & \text{para todos } t \\ E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+\tau}) = \gamma_\tau = 0 & \text{para todos } t \text{ y } \tau \neq 0 \end{cases}$$

- Es un proceso con media = 0, varianza constante, y sin autocorrelación. No se puede predecir a partir de su pasado.
- Los proceso de ruido blanco no están relacionados con ninguna variable y por consiguiente no aportan información adicional, salvo al de indicar cuanta aleatoriedad hay en el modelo

Procesos lineales

- Un proceso estocástico se dice lineal si se puede escribir como combinación lineal de su pasado y de ruidos blancos

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \dots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- Siendo L al operador de retardo (lag), tal que $Lx_t = x_{t-1}$
- En notación compacta

donde

$$x_t = \mu + \frac{\theta(L)}{\phi(L)} \varepsilon_t$$

$$\phi(L) = 1 + \phi_1 L + \dots + \phi_p L^p$$

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q$$

Descomposición de Wold

- Si $\phi(L)$ tiene las raíces fuera del círculo unidad, entonces la función racional $\phi(L)/\theta(L)$ se puede escribir como un polinomio de orden finito $\psi(L)$ y, por tanto,

$$x_t - \mu = \psi(L)\varepsilon_t$$

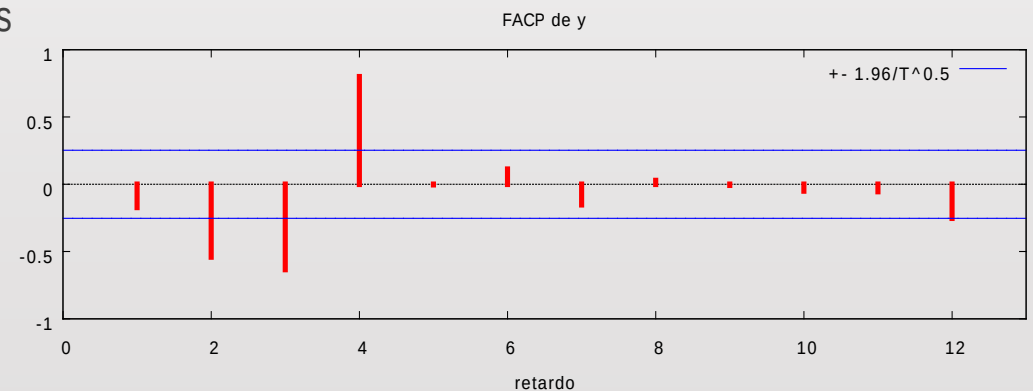
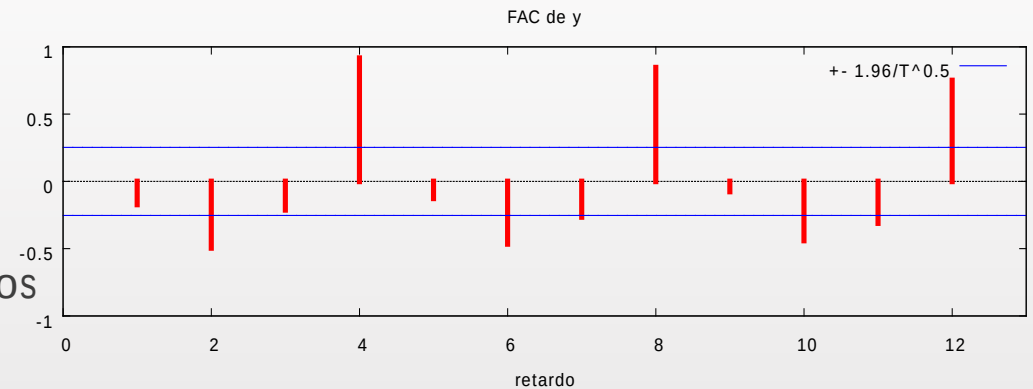
- A la función $\psi(L)$ se le denomina filtro lineal y a los parámetros ψ_j se les llama ψ -ponderaciones (psi-weights).

$$\gamma_0 = \text{var}(x_t) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2$$

$$\gamma_k = \text{cov}(x_t, x_{t-k}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}$$

Instrumentos gráficos de análisis

- Grafico de variable respecto al tiempo
 - Representa la evolución de la serie en el tiempo
 - Permite evaluar la tendencia y los ciclos
- Funcion de autocorrelacion
 - Representa la autocorrelacion respecto a los retardos
- Función de autocorrelación parcial
 - Representa la autocorrelacion parcial respecto a los retardos



PROCESOS AUTORREGRESIVOS (AR)

- ▶ Son aquellos que tienen memoria finita.
- ▶ La información de la variable está contenida en su propio pasado, hasta un determinado retardo, mas un ruido blanco, que mide la parte innovativa del período actual.

▶ Ejemplos:

- ▶ Expectativas adaptativas de inflación
- ▶ Ventas dependiendo del pasado
- ▶ Cotizaciones bursátiles
- ▶ Etc...

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} \dots \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t$$

Procesos autorregresivos de orden p (AR(p))

- En forma de polinomio será:

$$A_p(L)X_t = \varepsilon_t, \quad \text{donde} \quad A_p(L) = \sum_{j=0}^p \phi_j L^j \text{ con } \phi_0 = 1$$

- Su media viene dada por 0 si no hay deriva. Si hay deriva δ , su media es

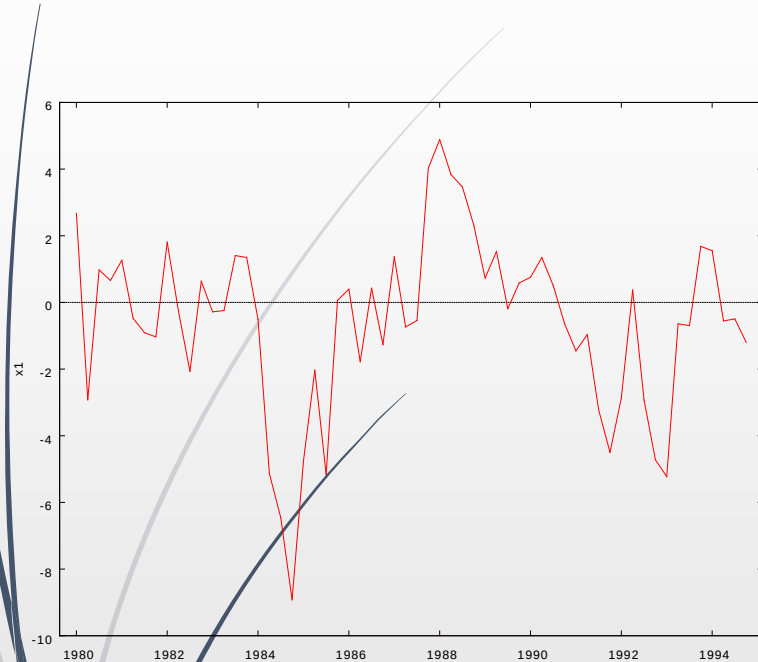
- Su varianza viene dada por

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 + \phi_1 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_p}$$

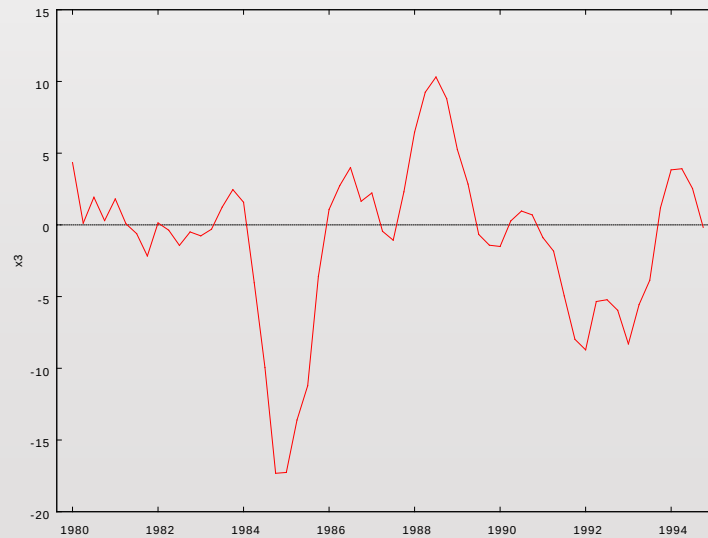
$$\mu = \frac{\delta}{1 + \phi_1 + \dots + \phi_p}$$

- La ACF será combinación lineal de exponenciales(para raíces reales) y ondas seno (para raíces imaginarias) que se amortiguan con el retardo temporal
- La PACF solo manifiesta los valores de los coeficientes hasta el orden p

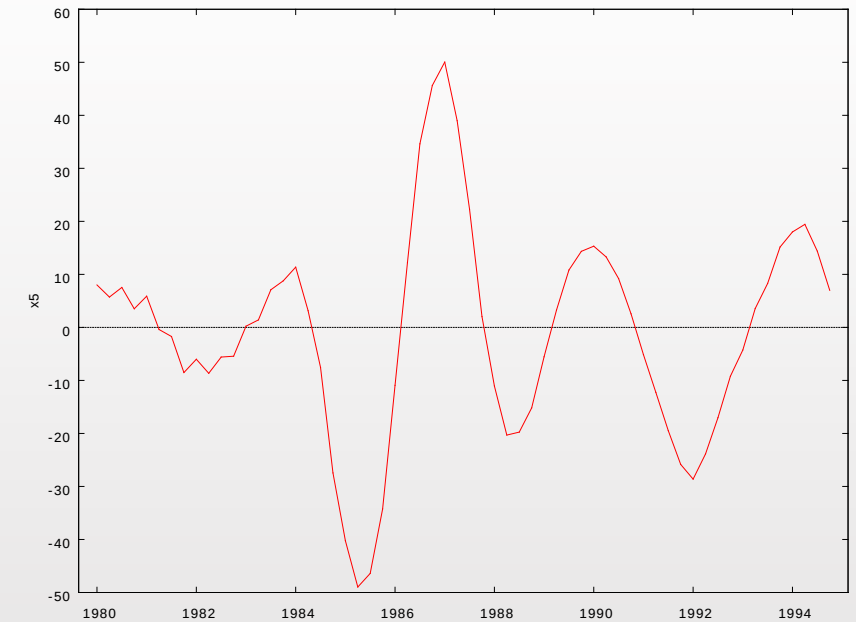
Gráficos de procesos autorregresivos



AR1



AR3



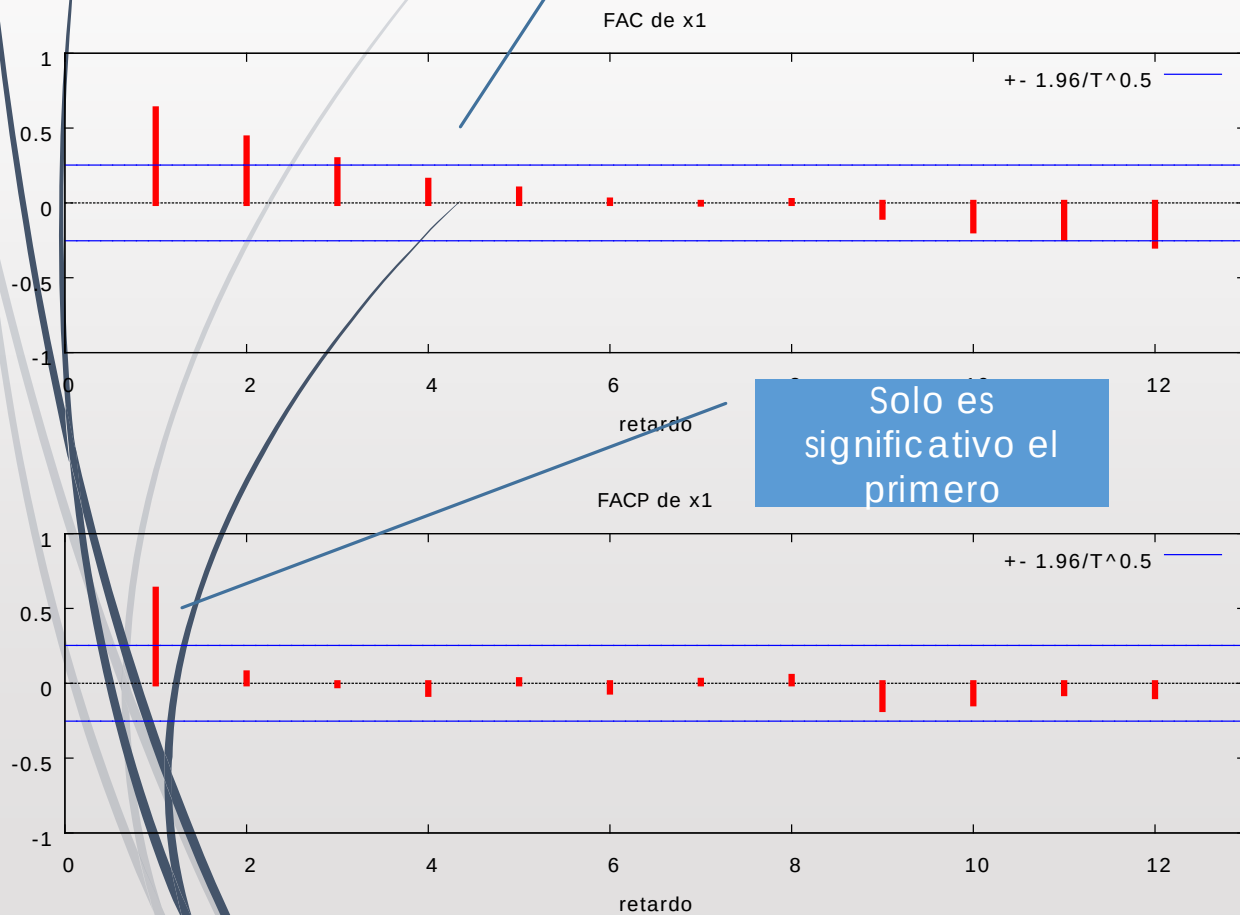
AR5

Procesos AR1

Valores

Caída
exponencial

Funciones



Función de autocorrelación para x1

***, ** y * indica significatividad a los niveles del 1%, 5% y 10%

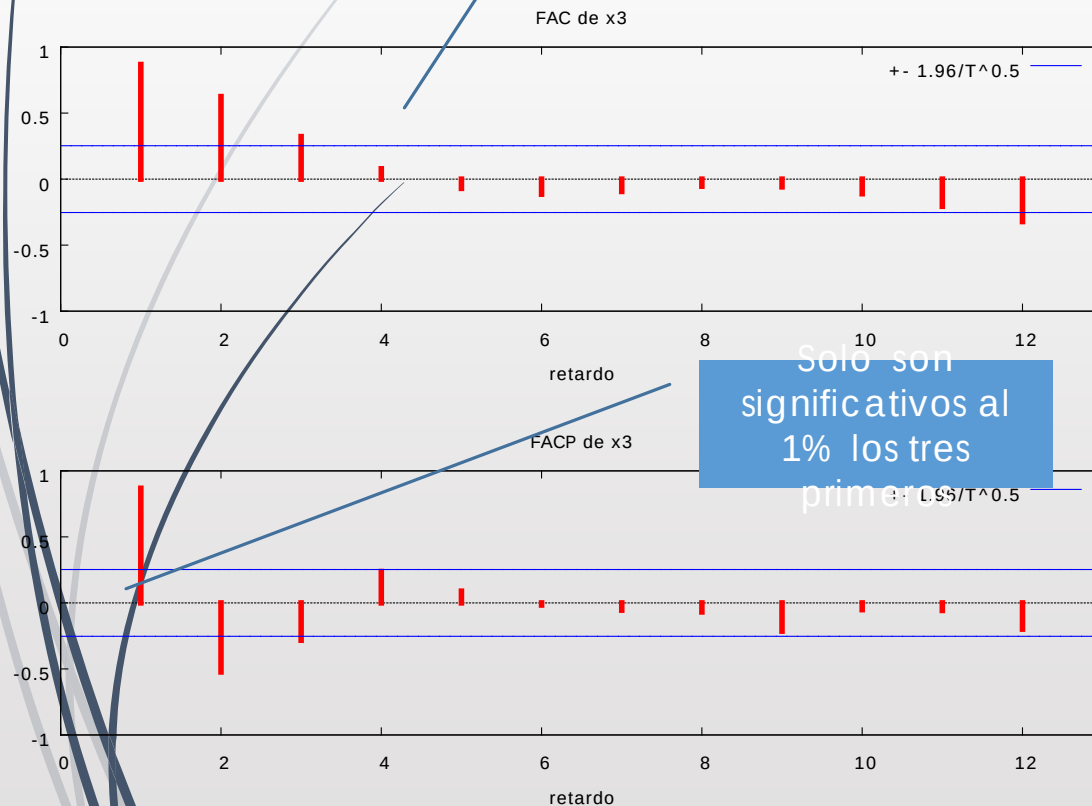
Utilizando desviación típica $1/T^{0.5}$

RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q. [valor p]
1	0.6247	***	0.6247	***	24.6069 [0.000]
2	0.4303	***	0.0656		36.4821 [0.000]
3	0.2847	**	-0.0123		41.7723 [0.000]
4	0.1475		-0.0701		43.2175 [0.000]
5	0.0891		0.0204		43.7548 [0.000]
6	0.0156		-0.0548		43.7716 [0.000]
7	-0.0043		0.0161		43.7729 [0.000]
8	0.0122		0.0423		43.7835 [0.000]
9	-0.0916		-0.1715		44.3955 [0.000]
10	-0.1829		-0.1335		46.8836 [0.000]
11	-0.2340	*	-0.0651		51.0422 [0.000]
12	-0.2845	**	-0.0853		57.3141 [0.000]

Procesos AR3

Caída
exponencial

Funciones



Solo son
significativos al
1% los tres
primeros

Valores

Función de autocorrelación para x3

***, ** y * indica significatividad a los niveles del 1%, 5% y 10%

Utilizando desviación típica $1/T^{0.5}$

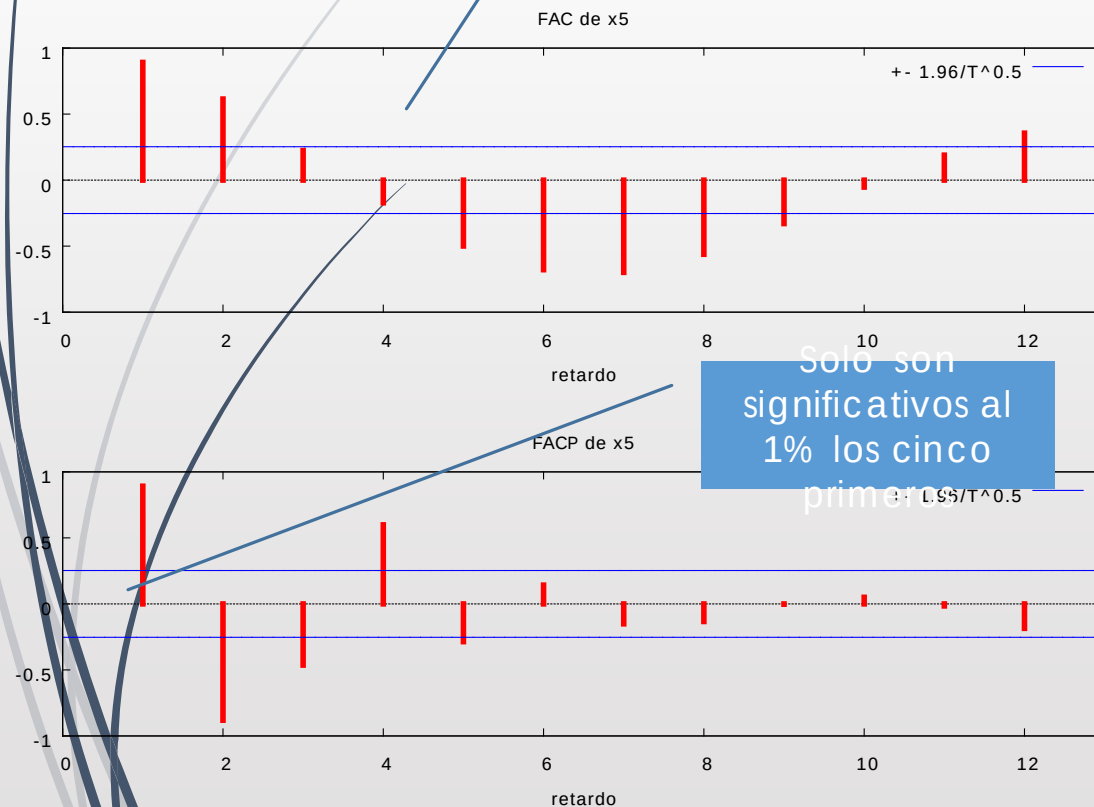
RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q. [valor p]
1	0.8684	***	0.8684	***	47.5429 [0.000]
2	0.6253	***	-0.5233	***	72.6236 [0.000]
3	0.3222	**	-0.2832	**	79.3985 [0.000]
4	0.0786		0.2379	*	79.8093 [0.000]
5	-0.0703		0.0889		80.1435 [0.000]
6	-0.1144		-0.0163		81.0447 [0.000]
7	-0.0935		-0.0552		81.6582 [0.000]
8	-0.0539		-0.0687		81.8657 [0.000]
9	-0.0591		-0.2138	*	82.1202 [0.000]
10	-0.1110		-0.0514		83.0377 [0.000]
11	-0.2060		-0.0575		86.2583 [0.000]
12	-0.3216	**	-0.1988		9. [0.000]

Solo son significativos
los tres primeros,
aunque el 4º y el 9
aparecen algo
significativos (al 5%)
por las interacciones

Procesos AR5

Funciones

Caída
exponencial en
onda



Valores

Función de autocorrelación para x5

***, ** y * indica significatividad a los niveles del 1%, 5% y 10%

Utilizando desviación típica $1/T^{0.5}$

RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q. [valor p]
1	0.8916	***	0.8916	***	50.1268 [0.000]
2	0.6144	***	-0.8811	***	74.3397 [0.000]
3	0.2237	*	-0.4638	***	77.6044 [0.000]
4	-0.1716		0.5991	***	79.5614 [0.000]
5	-0.4991	***	-0.2863	**	96.4066 [0.000]
6	-0.6786	***	0.1426		128.1320 [0.000]
7	-0.6990	***	-0.1510		162.4250 [0.000]
8	-0.5619	***	-0.1333		185.0120 [0.000]
9	-0.3292	**	-0.0025		192.9182 [0.000]
10	-0.0531		0.0499		193.1277 [0.000]
11	0.1892		-0.0155		195.8464 [0.000]
12	0.3559	***	-0.1850		205.6626 [0.000]

PROCESOS DE MEDIAS MÓVILES (MA)

- ▶ Son aquellos que tienen memoria infinita, aunque solo recoge información de un numero finito de periodos.
- ▶ La información de la variable está contenida en una serie de procesos innovativos (de ruido blanco) ocurridos en su propio pasado, hasta un determinado retardo, mas un ruido blanco, que mide la parte innovativa del período actual.

▶ Ejemplos:

$$x_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} = \theta(L) \varepsilon_t$$

- ▶ Cambios en los mercados con múltiples shocks
- ▶ Ventas en nuevos mercados
- ▶ Etc...

Procesos de medias móviles de orden q (MA(q))

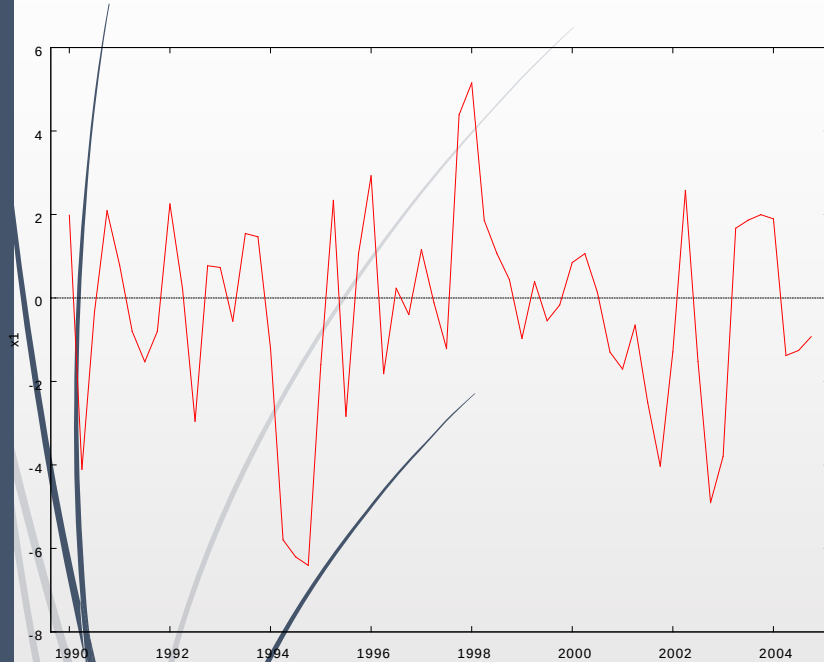
- En forma de polinomio será:
- Su media viene dada por la deriva.
- Sus covarianzas y autocorrelaciones vienen dadas por
- La ACF solo manifiesta los valores de los coeficientes hasta el orden q
- La PACF será combinación lineal de exponenciales (para raíces reales) y ondas seno (para raíces imaginarias) que se amortiguan con el retardo temporal

$$X_t = \theta(L)\varepsilon_t \quad \text{siendo} \quad \theta(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) & \text{si } k = 0 \\ \sigma^2(-\theta_k + \theta_1\theta_{k-1} + \dots + \theta_q\theta_{k-q}) & \text{si } 0 < k \leq q \\ 0 & \text{si } k > q \end{cases}$$

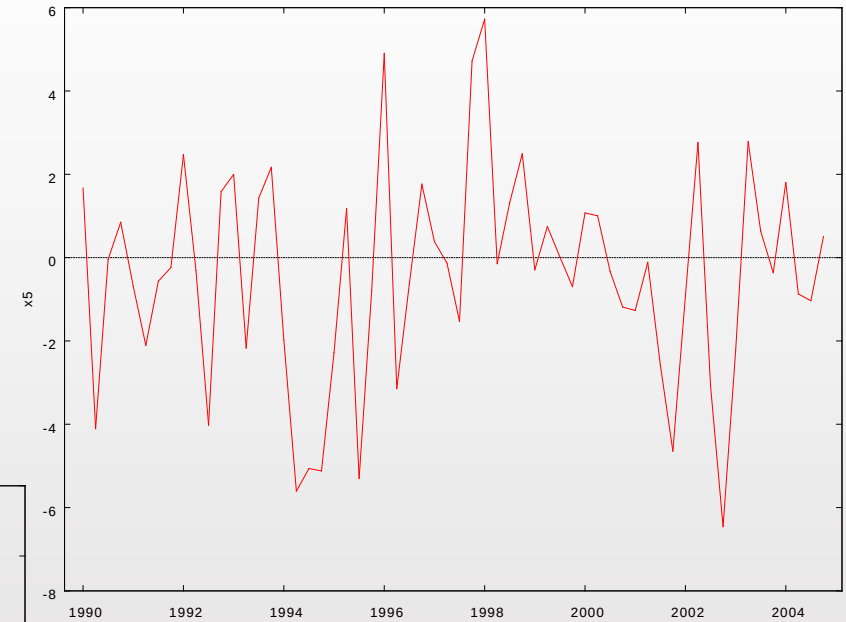
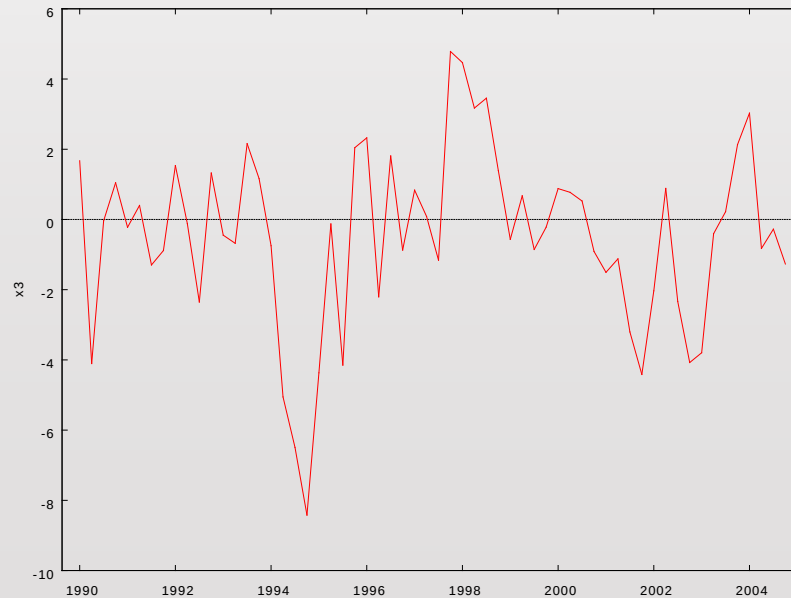
$$\text{luego, } \rho_k = \begin{cases} \sum_{i=0}^{q-k} \theta_i \theta_{k+i} \text{ con } \theta_0 = -1 & \text{si } k \leq q \\ 0 & \text{si } k > q \end{cases}$$

Gráficos de procesos de medias móviles



MA1

MA3

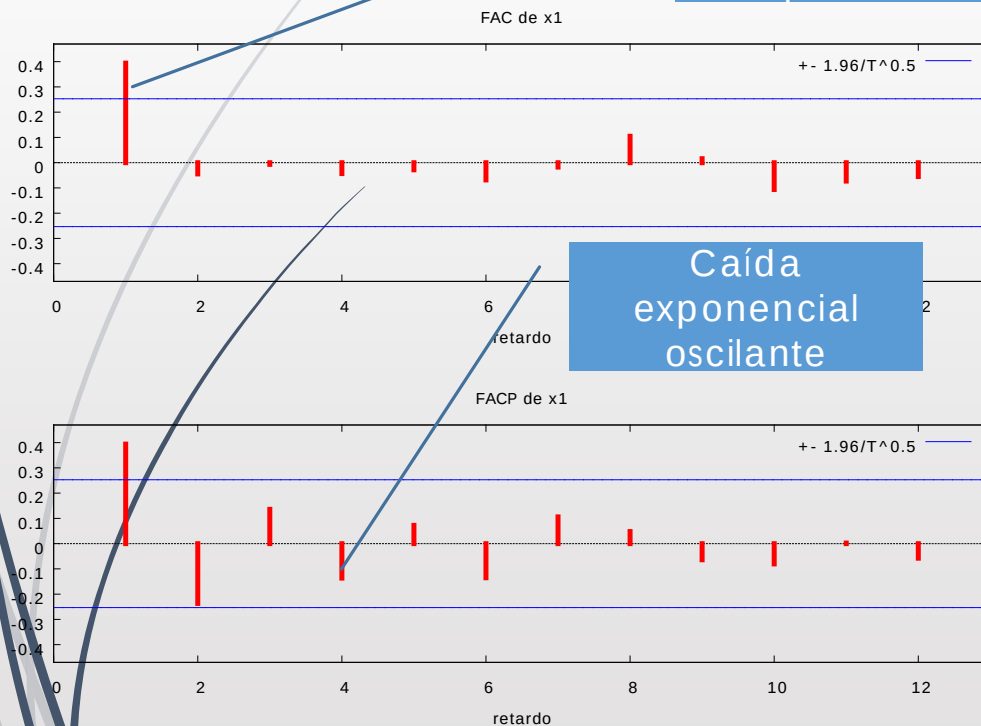


MA5

Procesos MA1

Valores

Funciones



Función de autocorrelación para x_1

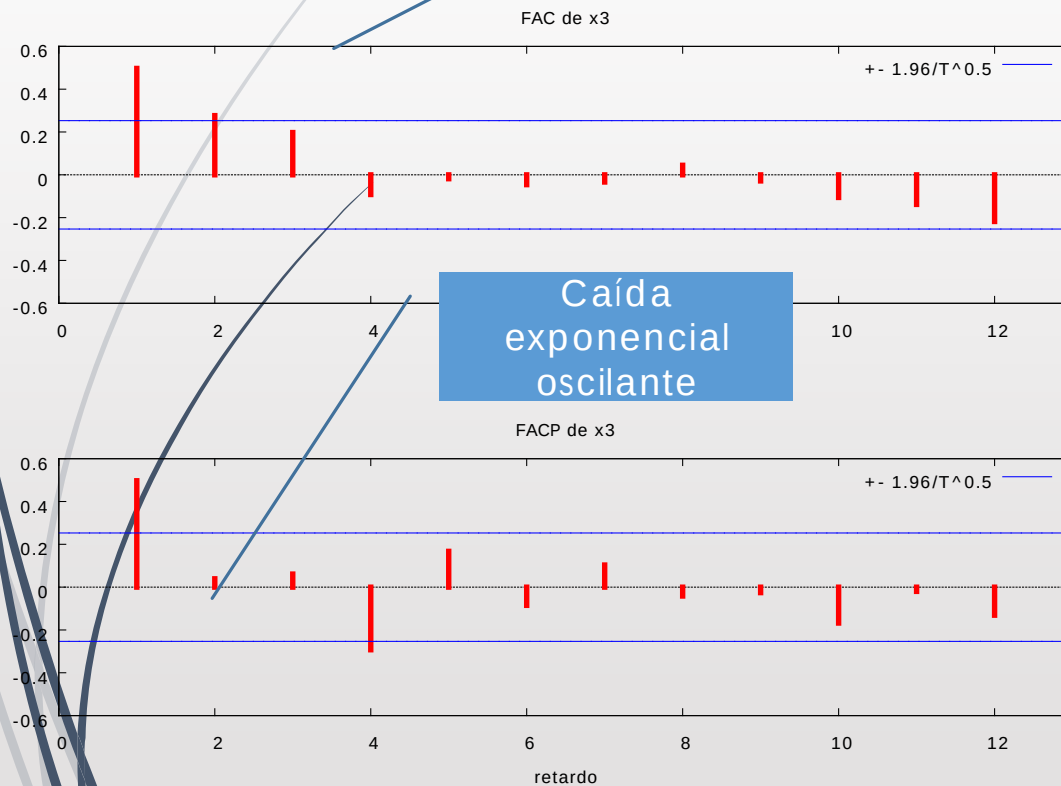
***, ** y * indica significatividad a los niveles del 1%, 5% y 10%

Utilizando desviación típica $1/T^{0.5}$

RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q. [valor p]
1	0.3944	***	0.3944	***	9.8072 [0.002]
2	-0.0445		-0.2369	*	9.9342 [0.007]
3	-0.0068		0.1360		9.9372 [0.019]
4	-0.0432		-0.1365		10.0612 [0.039]
5	-0.0283		0.0726		10.1152 [0.072]
6	-0.0683		-0.1352		10.4368 [0.107]
7	-0.0175		0.1061		10.4582 [0.164]
8	0.1048		0.0480		11.2438 [0.188]
9	0.0159		-0.0639		11.2624 [0.258]
10	-0.1063		-0.0803		12.1034 [0.278]
11	-0.0728		0.0026		12.5056 [0.327]
12	-0.0548		-0.0577		12.7385 [0.388]

Procesos MA3

Funciones



Solo son significativo al 1% los primeros

Valores

Función de autocorrelación para x3

***, ** y * indica significatividad a los niveles del 1%, 5% y 10%

Utilizando desviación típica $1/T^{0.5}$

RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q. [valor p]
1	0.4971	***	0.4971	***	15.5813 [0.000]
2	0.2767	**	0.0392		20.4902 [0.000]
3	0.1976		0.0612		23.0391 [0.000]
4	-0.0920		-0.2926	**	23.6015 [0.000]
5	-0.0182		0.1674		23.6240 [0.000]
6	-0.0460		-0.0850		23.7697 [0.001]
7	-0.0337		0.1035		23.8493 [0.001]
8	0.0447		-0.0415		23.9919 [0.002]
9	-0.0286		-0.0257		24.0515 [0.004]
10	-0.1057		-0.1677		24.8821 [0.006]
11	-0.1382		-0.0198		
12	-0.2179	*	-0.1311		

Significativos los dos primeros, el tercero cerca de estarlo y e 12 aparece por las interacciones pero no al 1%

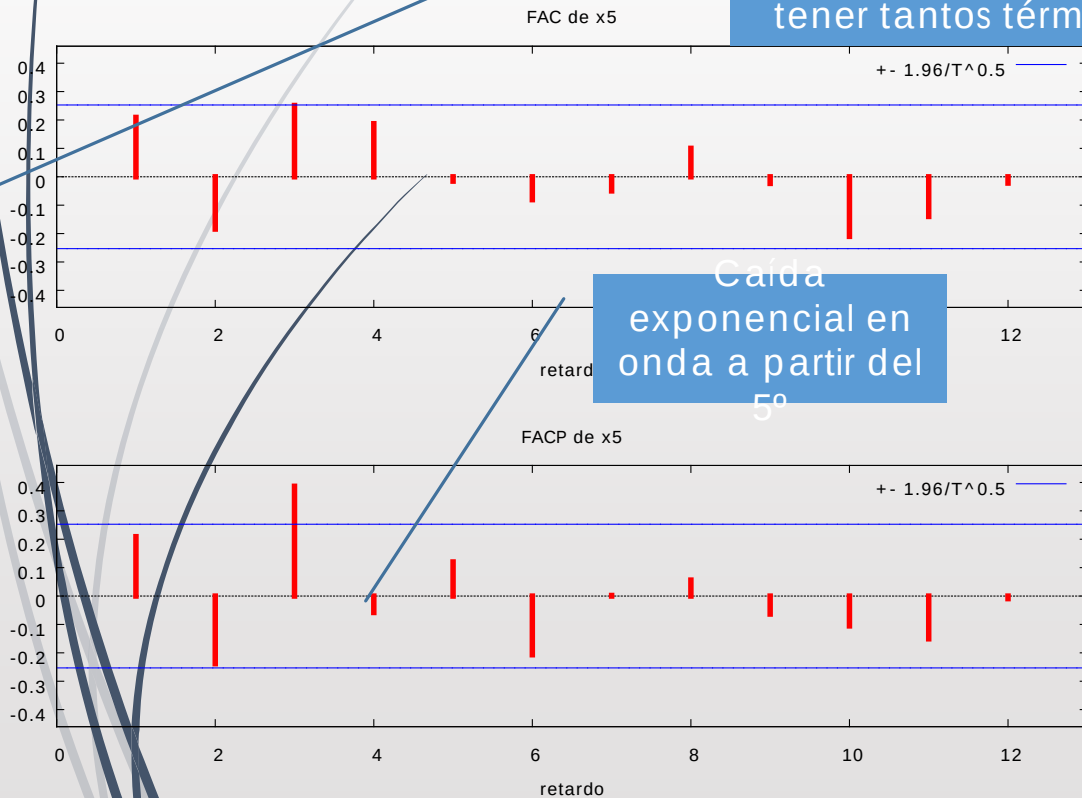
Procesos MA5

Valores

Funciones

Solo es significativo el tercero, es difícil distinguir el proceso al tener tantos términos.

Caída exponencial en onda a partir del 5º



Función de autocorrelación para x5

***, ** y * indica significatividad a los niveles del 1%, 5% y 10%

Utilizando desviación típica $1/T^{0.5}$

RETARDO	FAC	FACP	Estad-Q. [valor p]	
1	0.2092	0.2092	2.7585	[0.097]
2	-0.1841	-0.2383 *	4.9329	[0.085]
3	0.2512 *	0.3867 ***	9.0525	[0.029]
4	0.1871	-0.0579	11.3768	[0.023]
5	-0.0153	0.1201	11.3926	[0.044]
6	-0.0806	-0.2067	11.8405	[0.066]
7	-0.0498	0.0021	12.0145	[0.100]
8	0.1002	0.0562	12.7333	[0.121]
9	-0.0233	-0.0634	12.7727	[0.173]
10	-0.2099	-0.1052	16.0493	[0.098]
11	-0.1396	-0.1506	17.5290	[0.093]
12	-0.0221	-0.0092	17.5668	[0.129]

PROCESOS AUTORREGRESIVOS DE MEDIAS MÓVILES (ARMA)

- ▶ Combinan ambos aspectos. Tiene información del pasado de la propia variable pero también son aquellos que tienen memoria infinita, aunque solo recoge información de un número finito de periodos.
- ▶ La información de la variable está contenida en su propio pasado y en una serie de procesos innovativos (de ruido blanco) ocurridos en su propio pasado, hasta un determinado retardo, más un ruido blanco, que mide la parte innovativa del período actual.

$$x_t - \phi_1 x_{t-1} - \dots - \phi_p x_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

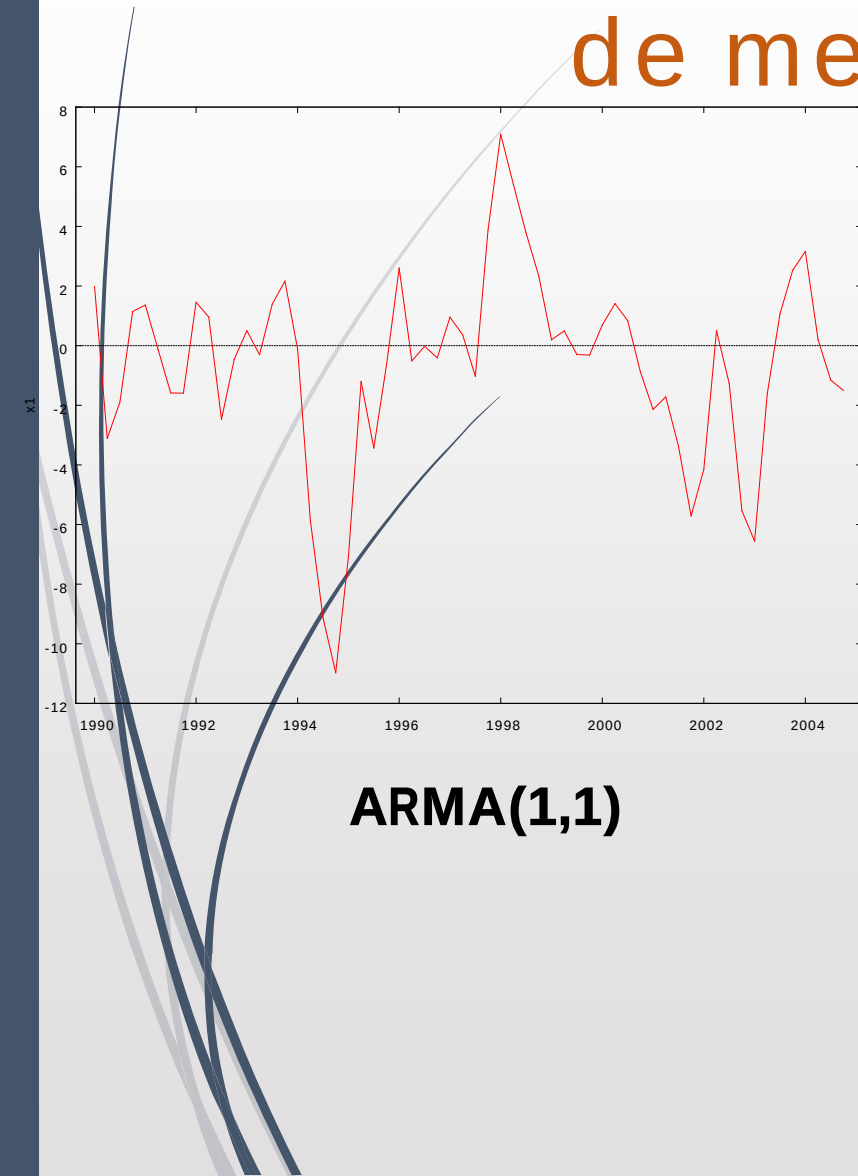
▶ Ejemplos:

- ▶ Variables económicas con información del pasado como ventas combinadas, inflación, desempleo, etc... Cambios en los mercados con múltiples shocks

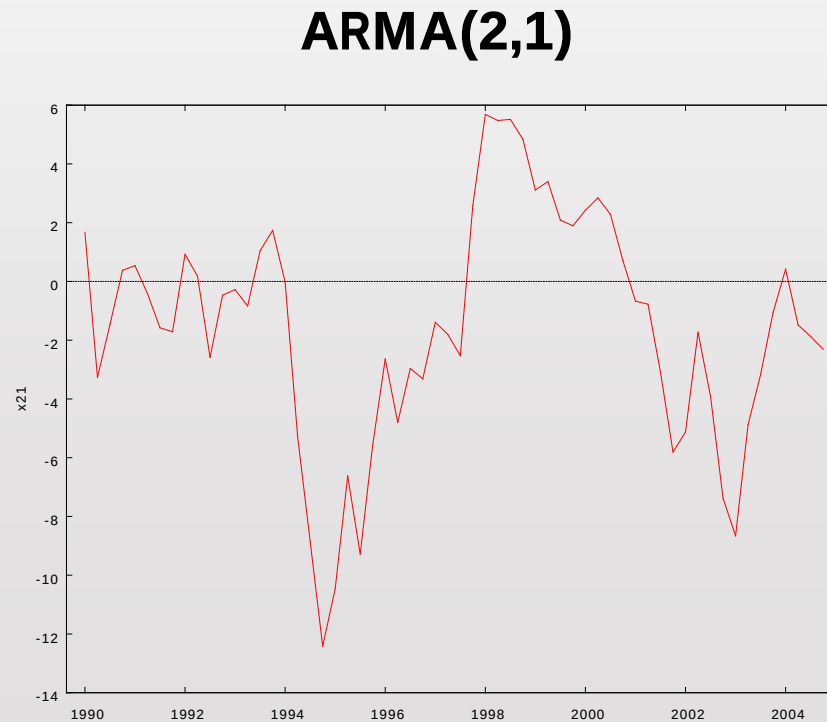
Procesos autorregresivos de orden p y de medias móviles de orden q (ARMA(p,q))

- En forma de polinomio será: $\phi(L)x_t = \theta(L)\varepsilon_t$ o $x_t - \mu = \psi(L)\varepsilon_t$ con $\psi(L) = \frac{\theta(L)}{\phi(L)}$
- Su media es similar a la del proceso AR(p)
- Sus covarianzas y autocorrelaciones vienen dadas por
$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 = \text{var}(x_t) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \\ \gamma_k = \text{cov}(x_t, x_{t-k}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} \end{array} \right.$$
- Es fácil ver que para $k > q$ se verifican las ecuaciones de Yule-Walker y por tanto el proceso será similar al AR(p) en sus ACF, por tanto serán combinaciones de exponenciales y ondas seno amortiguadas. Puesto que los p valores iniciales $r_q, \dots, r_{q-p}$ tienen que estar sobre la solución de la ecuación de Y-W, entonces la ecuación se verifica para $k > q-p$. Por consiguiente los $q-p$ valores iniciales no seguirán el modelo AR(p) (Si $q > p$).
- Razonando de igual forma para los PACF vemos que su comportamiento es el de un MA(q) para $k > p-q$ (si $p > q$), y en consecuencia habrá sólo $r = \max\{p-q, q-p\}$ ACF o PACF que tengan un comportamiento mixto. El resto de los ACF serán como el de un AR y el de los PACF como un MA.

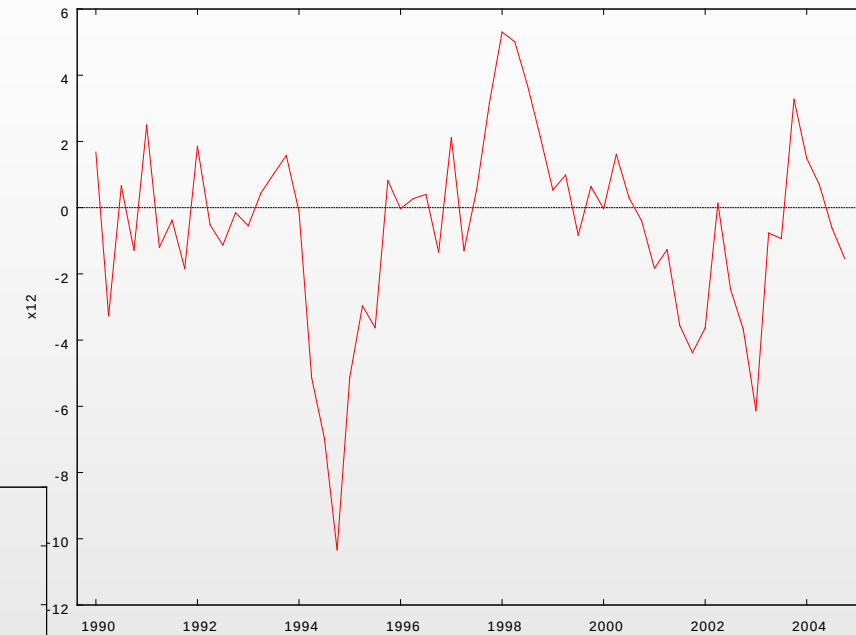
Gráficos de procesos autorregresivos de medias móviles



ARMA(1,1)



ARMA(2,1)

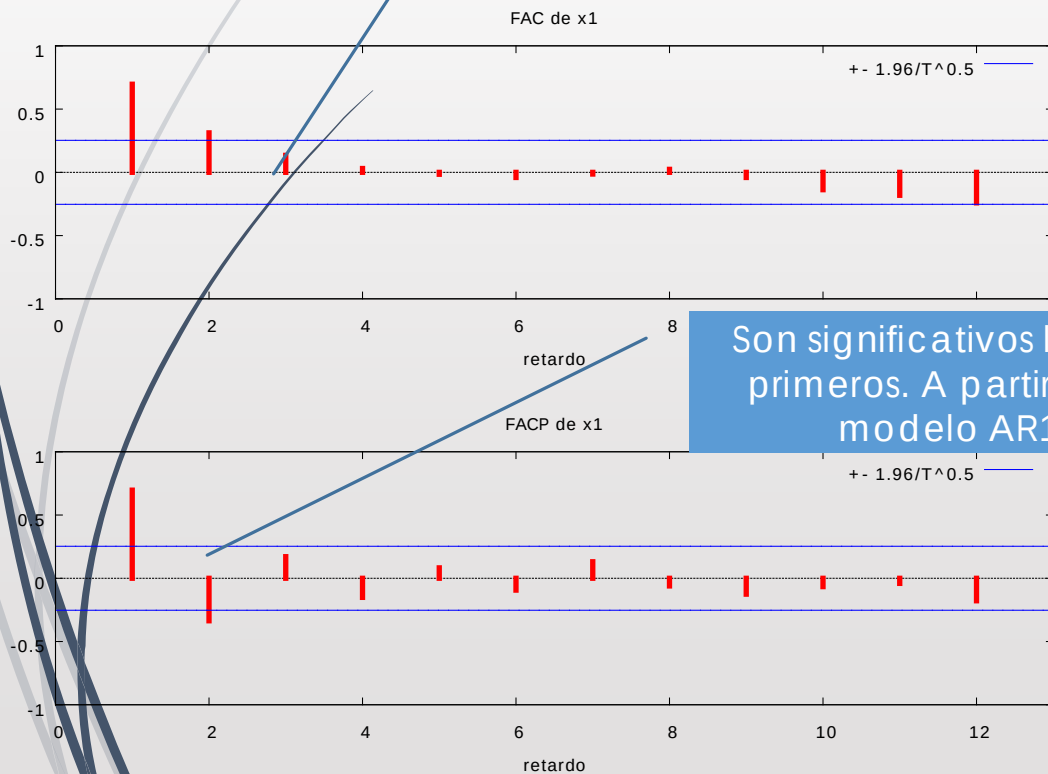


ARMA(1,2)

Procesos ARMA(1,1)

Funciones

Caída
exponencial



Son significativos los dos
primeros. A partir del 2
modelo AR1

Función de autocorrelación para x_1

***, ** y * indica significatividad a los niveles del 1%, 5% y 10%

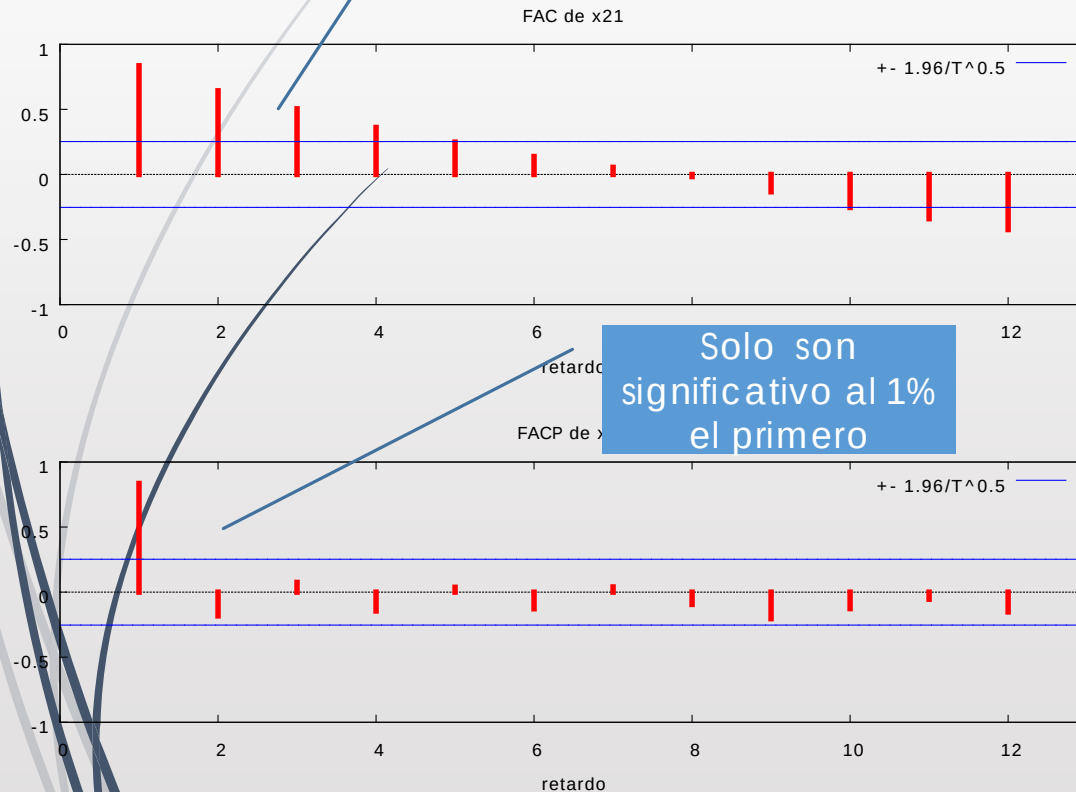
Utilizando desviación típica $1/T^{0.5}$

RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q. [valor p]
1	0.6966	***	0.6966	***	30.5998 [0.000]
2	0.3123	**	-0.3362	***	36.8555 [0.000]
3	0.1345		0.1708		38.0357 [0.000]
4	0.0303		-0.1510		38.0966 [0.000]
5	-0.0155		0.0823		38.1130 [0.000]
6	-0.0409		-0.0939		38.2284 [0.000]
7	-0.0136		0.1305		38.2413 [0.000]
8	0.0237		-0.0608		38.2814 [0.000]
9	-0.0408		-0.1259		38.4026 [0.000]
10	-0.1375		-0.0663		39.8090 [0.000]
11	-0.1815		-0.0406		42.3105 [0.000]
12	-0.2414	*	-0.1781		46.8280 [0.000]

Procesos ARMA(2,1)

Funciones

La caída es mas suave que exponencial



Valores

Función de autocorrelación para x21

***, ** y * indica significatividad a los niveles del 1%, 5% y 10%

Utilizando desviación típica $1/T^{0.5}$

RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q. [valor p]
1	0.8355	***	0.8355	***	44.0156 [0.000]
2	0.6430	***	-0.1825		70.5336 [0.000]
3	0.5047	***	0.0751		87.1600 [0.000]
4	0.3612	***	-0.1450		95.8277 [0.000]
5	0.2487	*	0.0376		100.0097 [0.000]
6	0.1382		-0.1280		101.3253 [0.000]
7	0.0549		0.0400		101.5371 [0.000]
8	-0.0164		-0.0943		101.5562 [0.000]
9	-0.1330		-0.2037		102.8472 [0.000]
10	-0.2540	**	-0.1269		107.6468 [0.000]
11	-0.3401	***	-0.0545		111.1111 [0.000]
12	-0.4234	***	-0.1521		114.2857 [0.000]

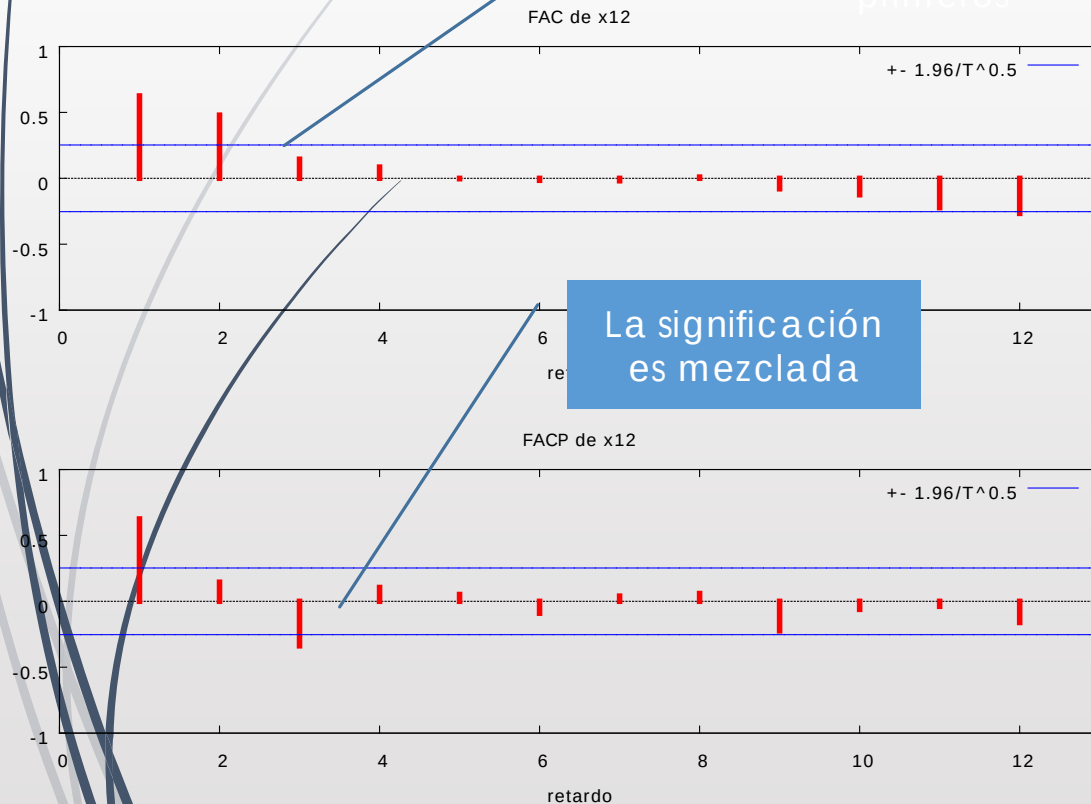
Los efectos son mas complejos que en los AR en el FAC, pero el FACP señala que debería ser un AR1

Procesos ARMA(1,2)

Funciones

El descenso es mas suave, pero son significativos los dos primeros

La significación es mezclada



Valores

Función de autocorrelación para x12

***, ** y * indica significatividad a los niveles del 1%, 5% y 10%

Utilizando desviación típica $1/T^{0.5}$

RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q. [valor p]
1	0.6250	***	0.6250	***	24.6278 [0.000]
2	0.4791	***	0.1453		39.3527 [0.000]
3	0.1452		-0.3379	***	40.7287 [0.000]
4	0.0853		0.1053		41.2115 [0.000]
5	-0.0033		0.0520		41.2122 [0.000]
6	-0.0151		-0.0903		41.2279 [0.000]
7	-0.0187		0.0396		41.2525 [0.000]
8	0.0094		0.0594		41.2589 [0.000]
9	-0.0794		-0.2241	*	41.7190 [0.000]
10	-0.1249		-0.0611		42.8796 [0.000]
11	-0.2225	*	-0.0381		46.6388 [0.000]
12	-0.2664	**	-0.1608		52.1387 [0.000]

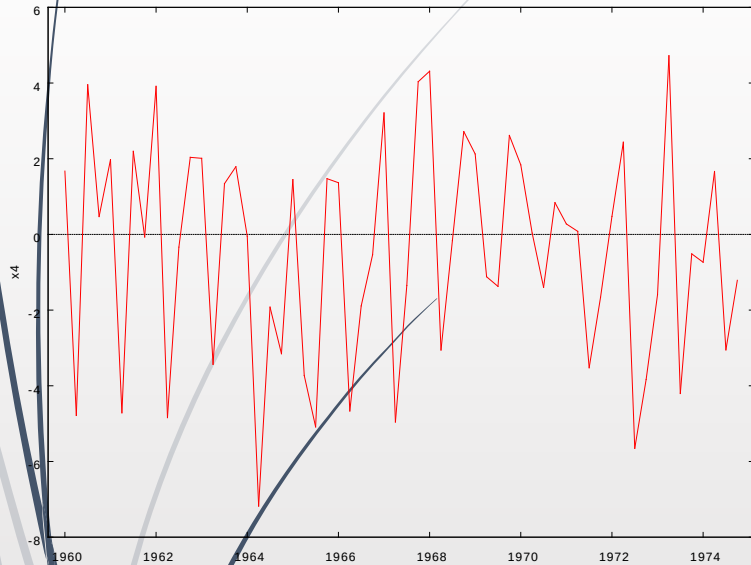
PROCESOS AUTORREGRESIVOS DE MEDIAS MÓVILES ESTACIONALES (ARMA (p,q), (P, Q)_s)

- Son proceso ARMA que combina un efecto del pasado con un efecto estacional del pasado. Suelen considerarse de tipo multiplicativo, por lo que los efectos son mas fáciles de incluir en el modelo lineal.
- Procesos ARMA estacionales: representado por ARMA(p,q) (P,Q)_s donde los parámetros p y q hacen referencia a un modelo ARMA(p,q) y los parámetros P y Q hacen referencia a la estacionalidad: s es el período, P es el número de parámetros AR con ese período y Q el de parámetros MA. El modelo completo será de la forma:

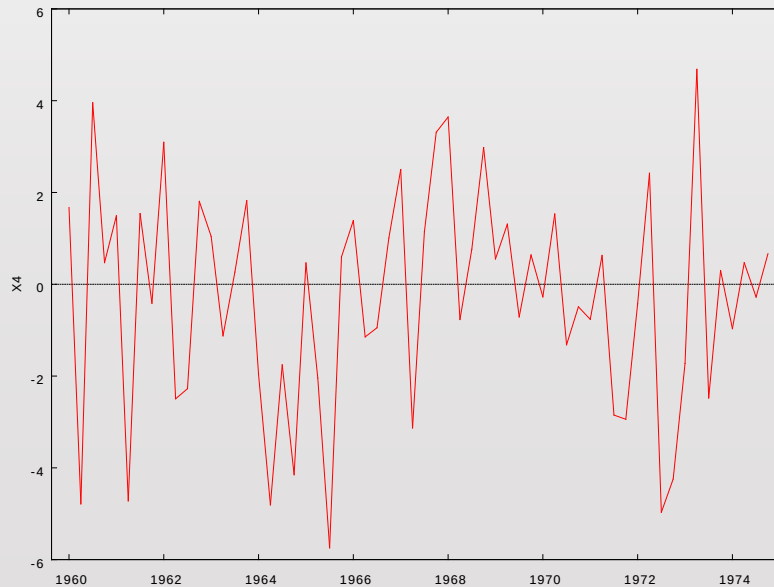
$$(1 - \Phi_1 L^s - \dots - \Phi_P L^{sP})(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)x_t = (1 - \Theta_1 L^s - \dots - \Theta_Q L^{sQ})(1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q)\varepsilon_t$$

- Los efectos estacionales se comportan como los efectos normales pero con el periodo estacional
- **Ejemplos:**
 - Variables económicas con información del pasado como ventas combinadas, inflación, desempleo, etc...Cambios en los mercados con múltiples shocks

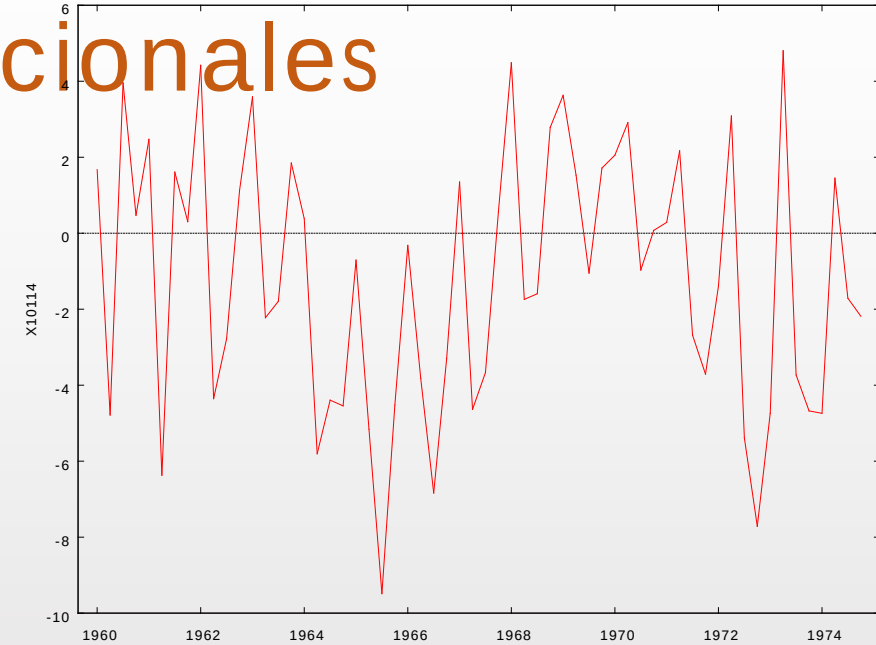
Gráficos de procesos autorregresivos de medias móviles estacionales



AR(1)4



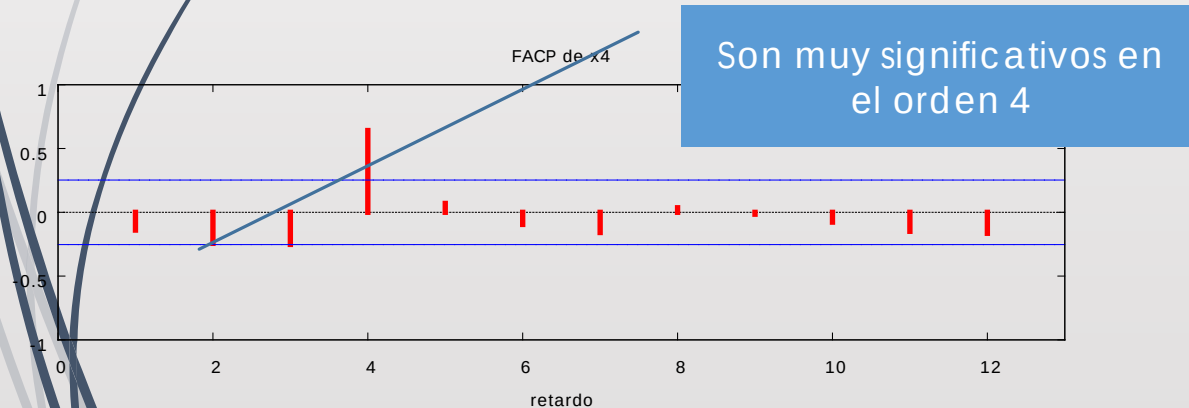
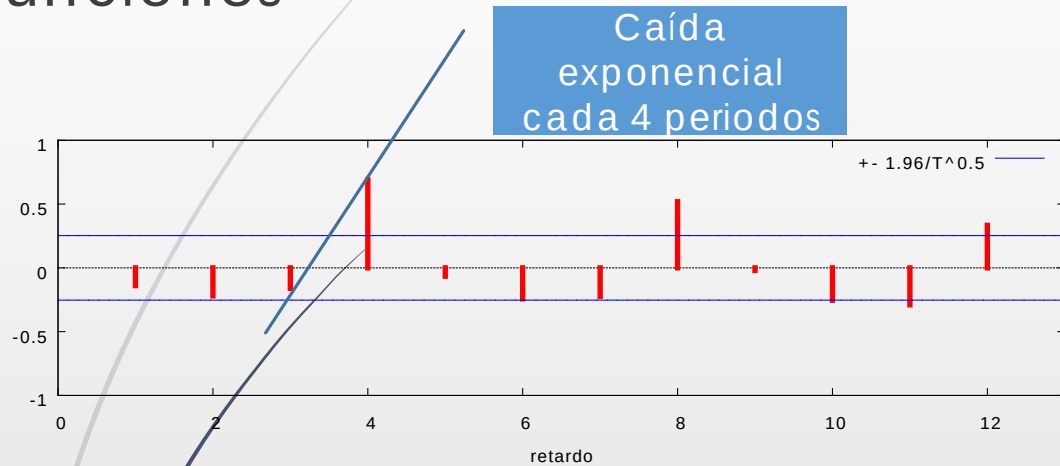
MA(1)4



ARMA(1,0)(1,1)4

Procesos AR (1)₄ valores

Funciones



Función de autocorrelación para x4

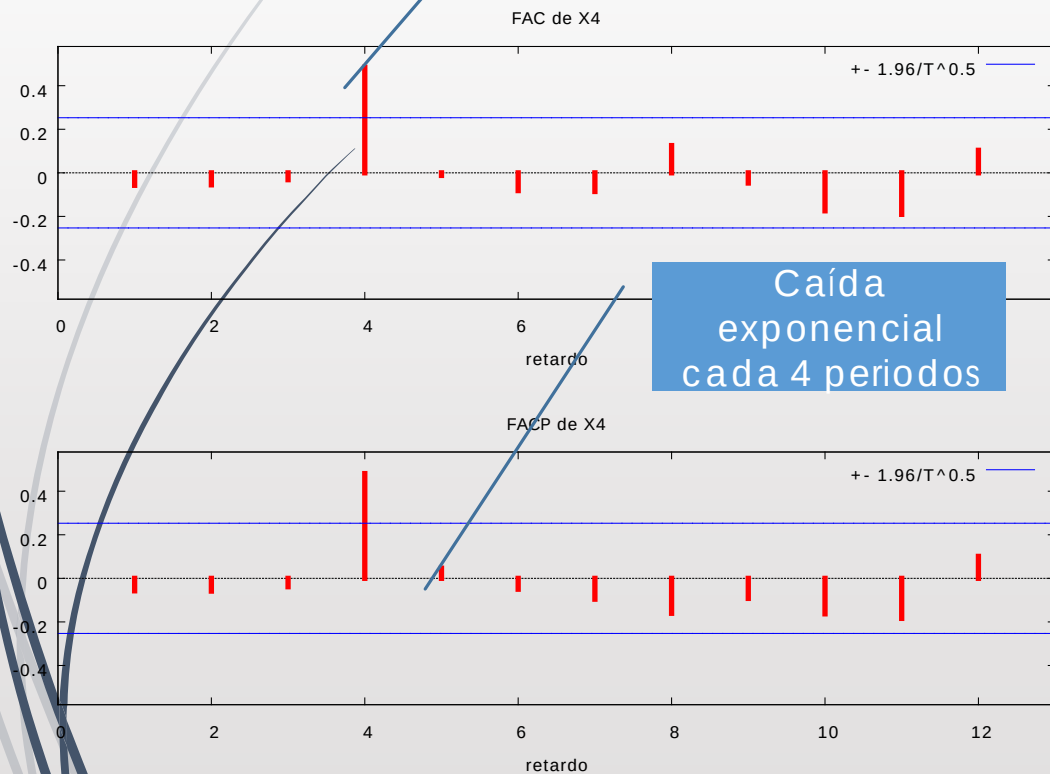
***, ** y * indica significatividad a los niveles del 1%, 5% y 10%

Utilizando desviación típica $1/T^{0.5}$

RETARDO	FAC	FACP	Estad-Q. [valor p]	
1	-0.1395	-0.1395	1.2261	[0.268]
2	-0.2192 *	-0.2434 *	4.3086	[0.116]
3	-0.1603	-0.2518 *	5.9857	[0.112]
4	0.6897 ***	0.6413 ***	37.5876	[0.000]
5	-0.0657	0.0699	37.8794	[0.000]
6	-0.2429 *	-0.0952	41.9448	[0.000]
7	-0.2231 *	-0.1586	45.4371	[0.000]
8	0.5186 ***	0.0358	64.6735	[0.000]
9	-0.0201	-0.0148	64.7029	[0.000]
10	-0.2537 **	-0.0771	69.4912	[0.000]
11	-0.2898 **	-0.1490	75.8673	[0.000]
12	0.3330 **	-0.1644	84.4604	[0.000]

Procesos MA (1)₄ valores

Funciones



Función de autocorrelación para X4

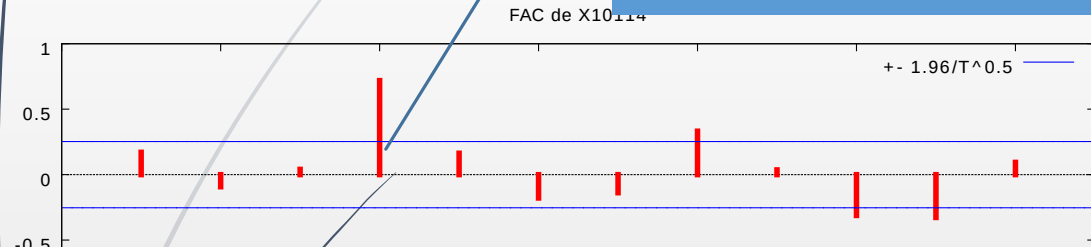
***, ** y * indica significatividad a los niveles del 1%, 5% y 10%

Utilizando desviación típica $1/T^{0.5}$

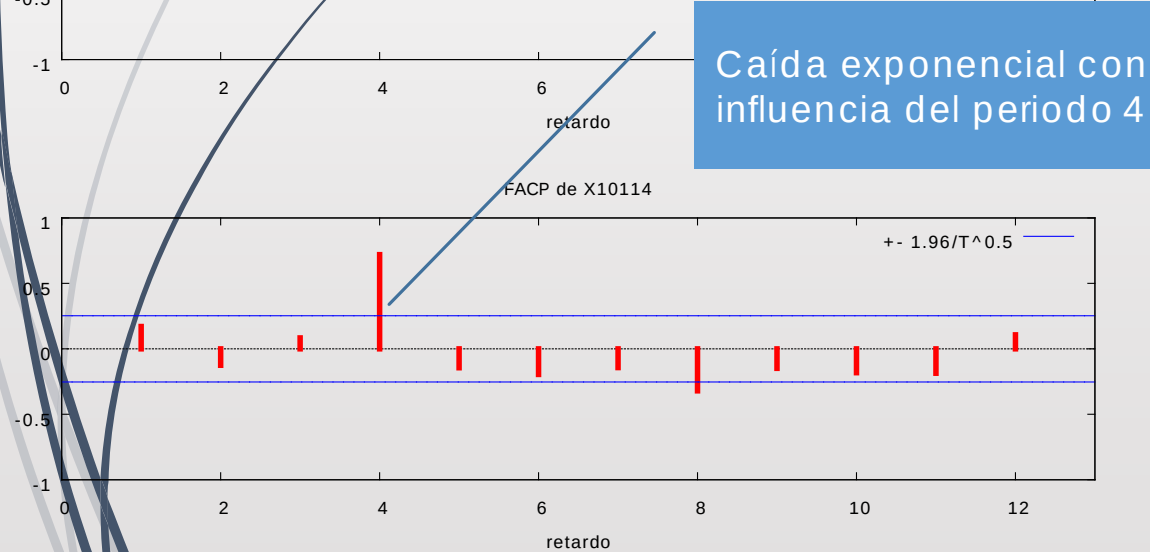
RETARDO	FAC	FACP	Estad-Q. [valor p]	
1	-0.0573	-0.0573	0.2069	[0.649]
2	-0.0552	-0.0587	0.4024	[0.818]
3	-0.0316	-0.0386	0.4675	[0.926]
4	0.4846 ***	0.4809 ***	16.0645	[0.003]
5	-0.0119	0.0468	16.0741	[0.007]
6	-0.0816	-0.0501	16.5328	[0.011]
7	-0.0856	-0.0958	17.0471	[0.017]
8	0.1252	-0.1605	18.1689	[0.020]
9	-0.0469	-0.0922	18.3290	[0.032]
10	-0.1745	-0.1631	20.5951	[0.024]
11	-0.1906	-0.1838	23.3529	[0.016]
12	0.1036	0.1009	24.1841	[0.019]

Procesos ARMA (1,0)(1,1)₄

Funciones



Son significativos en el orden 4, indicando la estacionalidad, el resto no se detecta



Caída exponencial con influencia del periodo 4

Valores

Función de autocorrelación para X10114

***, ** y * indica significatividad a los niveles del 1%, 5% y 10%

Utilizando desviación típica $1/T^{0.5}$

RETARDO	FAC	FACP	Estad-Q. [valor p]	
1	0.1708	0.1708	1.8399	[0.175]
2	-0.0926	-0.1254	2.3899	[0.303]
3	0.0406	0.0835	2.4975	[0.476]
4	0.7186 ***	0.7198 ***	36.8014	[0.000]
5	0.1635	-0.1447	38.6085	[0.000]
6	-0.1783	-0.1957	40.7987	[0.000]
7	-0.1383	-0.1433	42.1408	[0.000]
8	0.3317 **	-0.3209 **	50.0125	[0.000]
9	0.0365	-0.1489	50.1099	[0.000]
10	-0.3117 **	-0.1823	57.3406	[0.000]
11	-0.3272 **	-0.1863	65.4689	[0.000]
12	0.0937	0.1071	66.1496	[0.000]

PROCESOS INTEGRADOS AUTORREGRESIVOS DE MEDIAS MÓVILES (ARIMA)

- ▶ Son proceso no estacionarios. Una vez diferenciados hasta ser estacionarios, la parte estacionaria se comporta como un proceso ARMA, es decir, tiene información del pasado de la propia variable pero también son aquellos que tienen memoria infinita, aunque solo recoge información de un numero finito de periodos.
- ▶ La información de la variable está contenida en su propio pasado y en una serie de procesos innovativos (de ruido blanco) ocurridos en su propio pasado, hasta un determinado retardo, mas un ruido blanco, que mide la parte innovativa del período actual.

$$\phi(L)\Delta^d x_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

- ▶ **Ejemplos:**

- ▶ Variables económicas con información del pasado como ventas combinadas, inflación, desempleo, etc...Cambios en los mercados con múltiples shocks

Análisis de los procesos ARIMA(p,d,q)

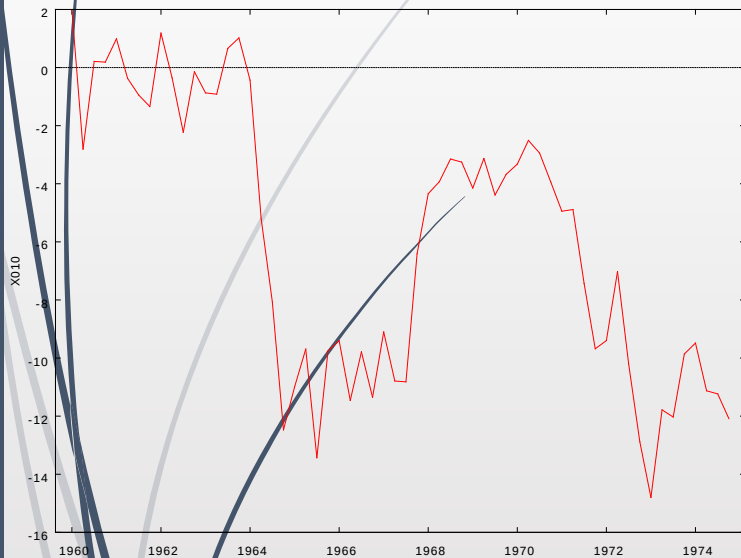
- Combina dos partes:
 - La estacionaria, que se trata como un proceso ARMA y verifica sus propiedades
 - La no estacionaria que domina el comportamiento de la serie y es la que se observa en su representación, solo después de diferenciarla se observa el comportamiento ARMA

$$x_t = \psi(L) \varepsilon_t \quad \text{con} \quad \psi(L) = (1-L)^{-d} \phi(L)^{-1} \theta(L)$$

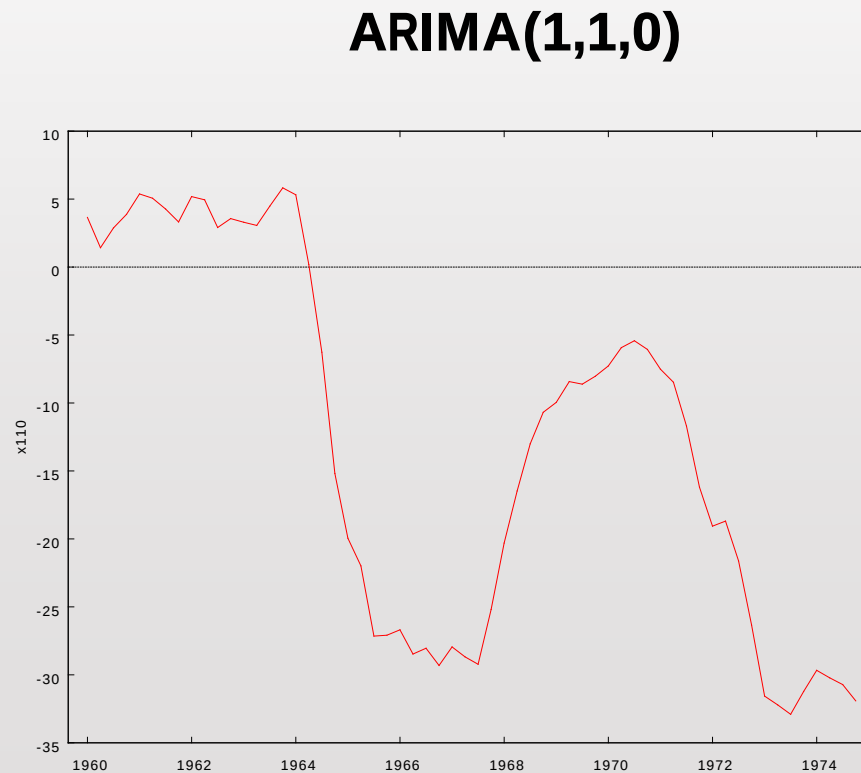
Orden de
diferenciación:
parte no
estacionaria

Proceso ARMA:
parte
estacionaria

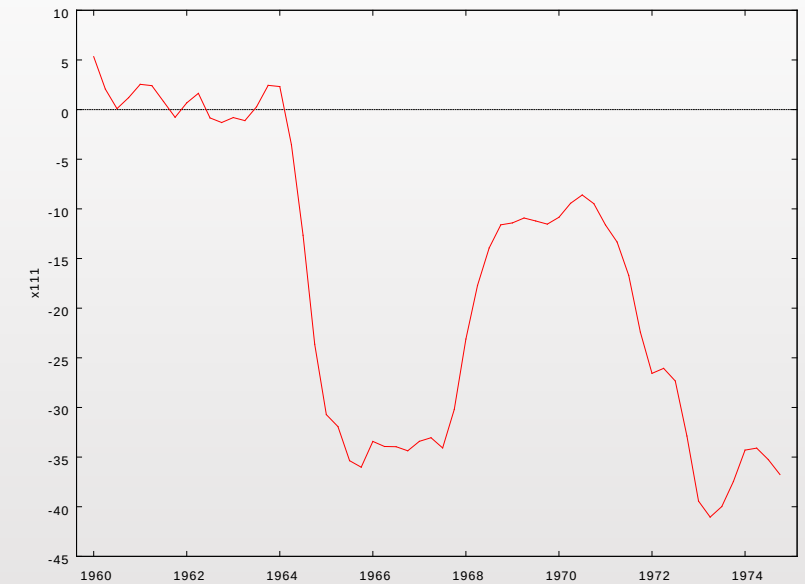
Gráficos de procesos integrados autorregresivos de medias móviles



ARIMA(0,1,0)



ARIMA(1,1,0)



ARIMA(1,1,1)

Procesos ARIMA(0,1,0)

Valores

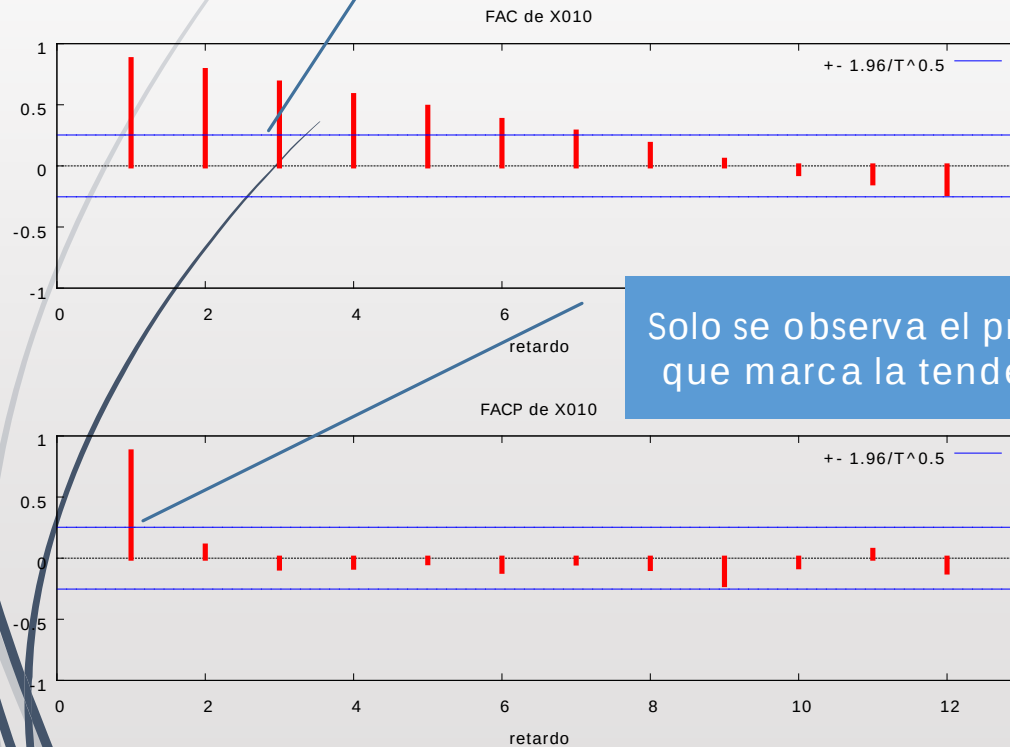
Función de autocorrelación para X010

***, ** y * indica significatividad a los niveles del 1%, 5% y 10%

Utilizando desviación típica $1/T^{0.5}$

Funciones

Caída lineal



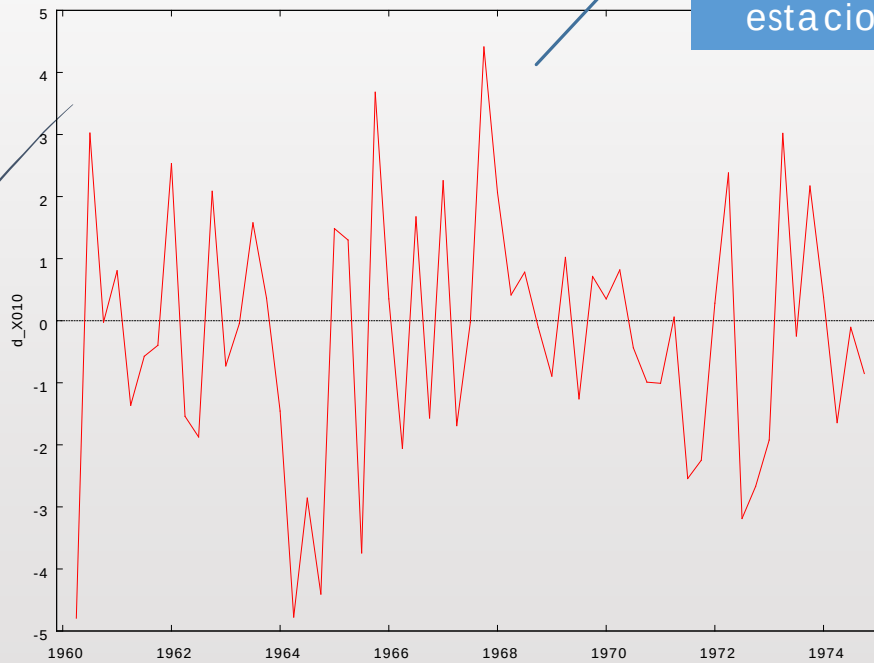
Solo se observa el primero que marca la tendencia

RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q. [valor p]
1	0.8695	***	0.8695	***	47.6692 [0.000]
2	0.7802	***	0.0991		86.7139 [0.000]
3	0.6778	***	-0.0808		116.6999 [0.000]
4	0.5752	***	-0.0735		138.6790 [0.000]
5	0.4795	***	-0.0370		154.2330 [0.000]
6	0.3718	***	-0.1071		163.7549 [0.000]
7	0.2767	**	-0.0395		169.1288 [0.000]
8	0.1759		-0.0842		171.3421 [0.000]
9	0.0461		-0.2160	*	171.4972 [0.000]
10	-0.0629		-0.0699		171.7912 [0.000]
11	-0.1384		0.0636		173.2462 [0.000]
12	-0.2265	*	-0.1133		177.2231 [0.000]

Procesos ARIMA(0,1,0)

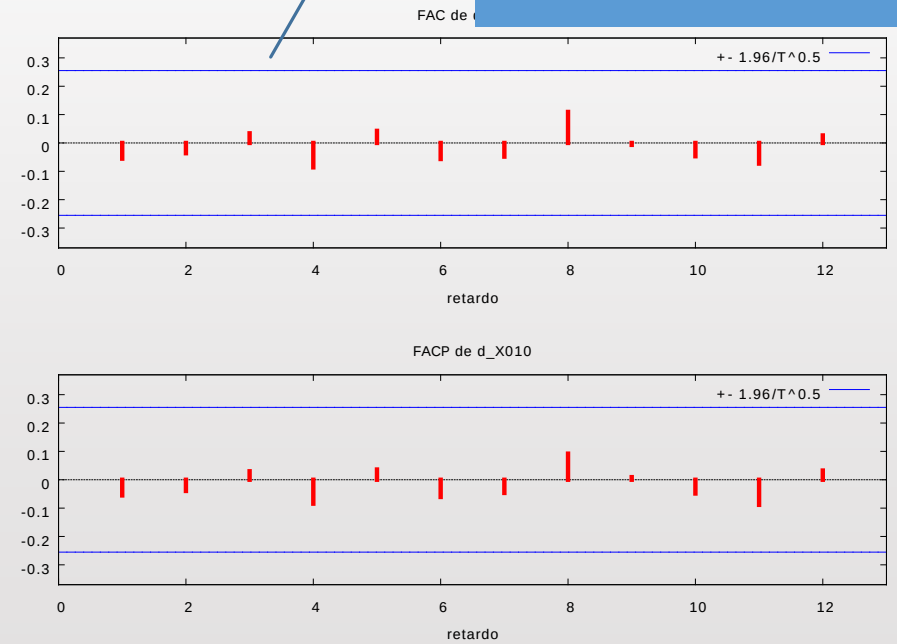
Serie diferenciada una vez

La serie es estacionaria



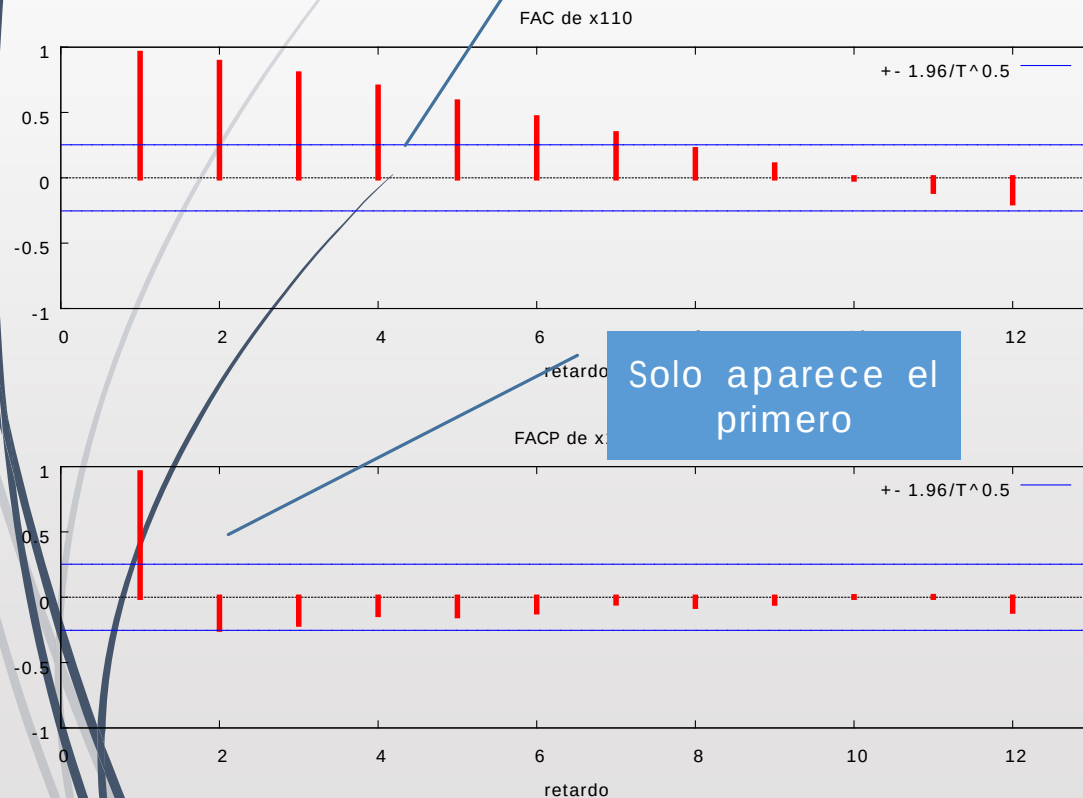
Funciones

Tiene comportamiento de ruido blanco: no hay efecto del pasado



Procesos ARIMA(1,1,0)

Funciones



Valores

Función de autocorrelación para x110

***, ** y * indica significatividad a los niveles del 1%, 5% y 10%

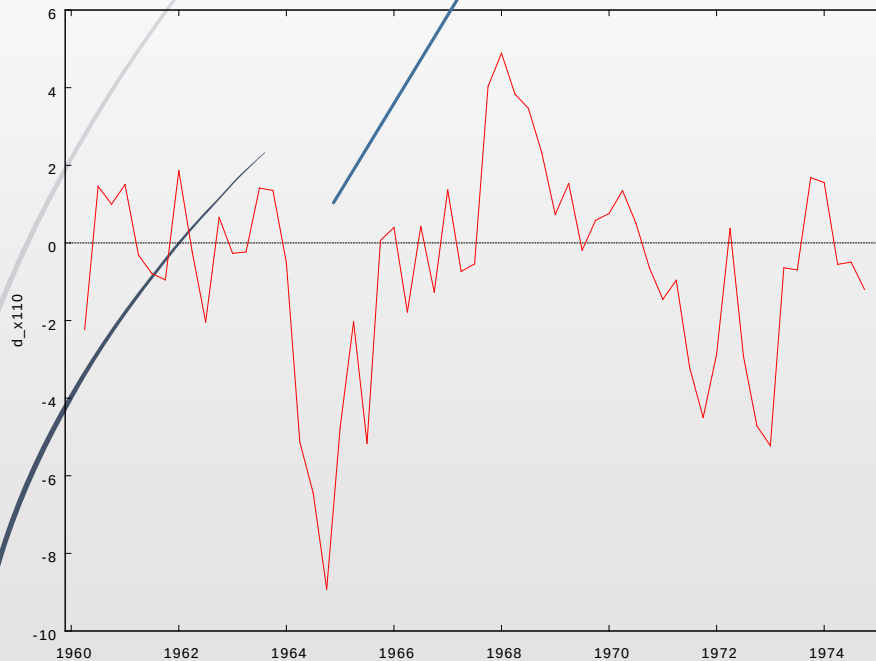
Utilizando desviación típica $1/T^{0.5}$

RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q. [valor p]
1	0.9516	***	0.9516	***	57.0947 [0.000]
2	0.8825	***	-0.2439	*	107.0453 [0.000]
3	0.7943	***	-0.2049		148.2206 [0.000]
4	0.6932	***	-0.1311		180.1377 [0.000]
5	0.5799	***	-0.1400		202.8802 [0.000]
6	0.4585	***	-0.1109		217.3633 [0.000]
7	0.3366	***	-0.0432		225.3164 [0.000]
8	0.2150	*	-0.0688		228.6235 [0.000]
9	0.0980		-0.0445		229.3235 [0.000]
10	-0.0087		0.0042		229.3291 [0.000]
11	-0.1023		0.0051		230.1237 [0.000]
12	-0.1901		-0.1054		232.9230 [0.000]

Procesos ARIMA(1,1,0)

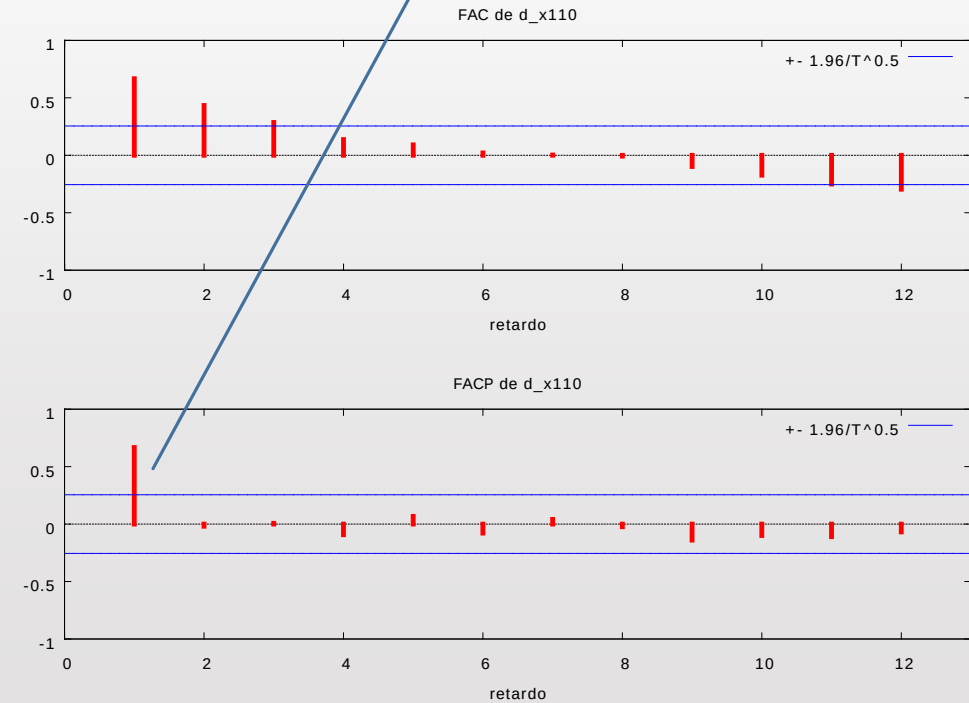
Serie diferenciada

Tiene
comportamiento
estacionario



Funciones

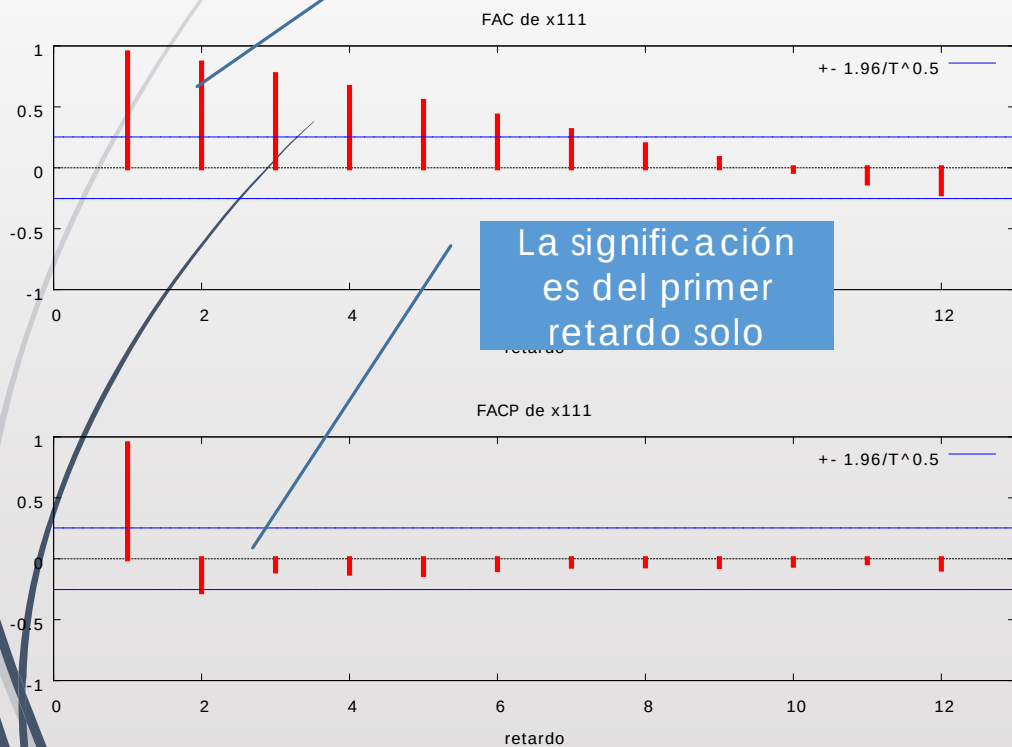
Solo aparece el
primero.
Comportamiento
de AR1



Procesos ARIMA(1,1,1)

Funciones

El descenso es lineal,
domina la tendencia



Valores

Función de autocorrelación para x111

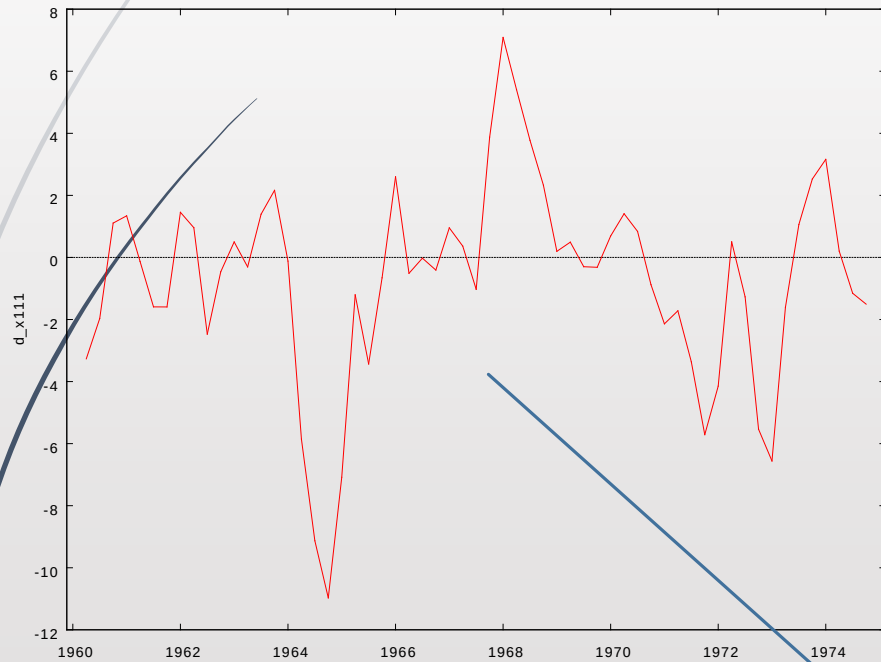
***, ** y * indica significatividad a los niveles del 1%, 5% y 10%

Utilizando desviación típica $1/T^{0.5}$

RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q. [valor p]
1	0.9430	***	0.9430	***	56.0694 [0.000]
2	0.8594	***	-0.2699	**	103.4378 [0.000]
3	0.7644	***	-0.0998		141.5684 [0.000]
4	0.6594	***	-0.1180		170.4532 [0.000]
5	0.5444	***	-0.1286		190.4984 [0.000]
6	0.4244	***	-0.0889		202.9046 [0.000]
7	0.3048	**	-0.0610		209.4258 [0.000]
8	0.1885		-0.0580		211.9666 [0.000]
9	0.0763		-0.0638		212.3917 [0.000]
10	-0.0291		-0.0530		212.4549 [0.000]
11	-0.1244		-0.0324		213.6293 [0.000]
12	-0.2129		-0.0848		217.1434 [0.000]

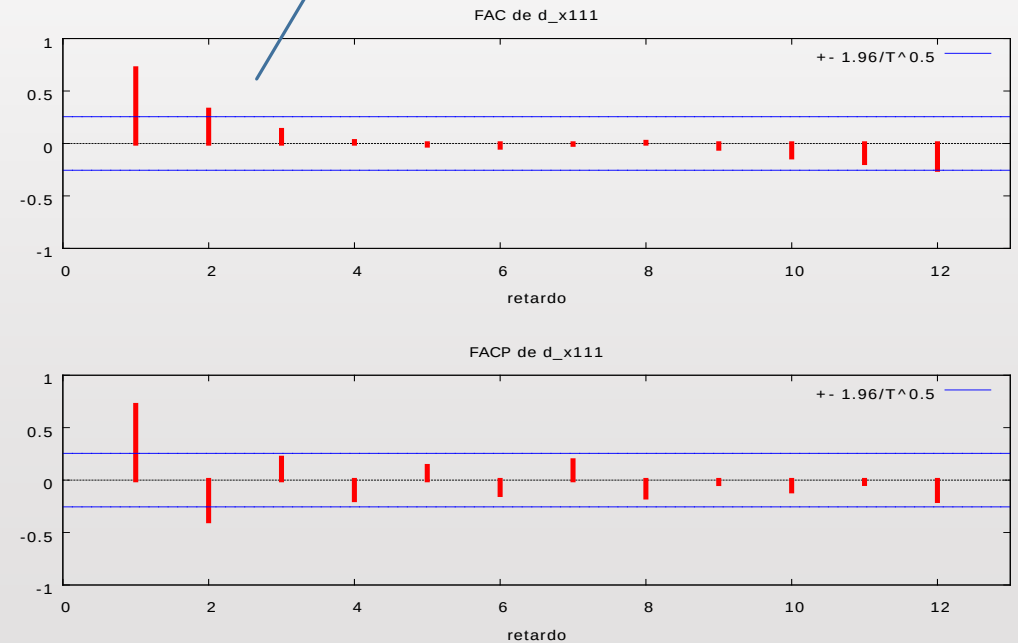
Procesos ARIMA(1,1,1)

Serie diferenciada una vez



Funciones

La significación es del primer retardo y segundo retardo



Comportamiento estacionario

PROCESOS INTEGRADOS AUTORREGRESIVOS DE MEDIAS MÓVILES ESTACIONALES (ARIMA_s)

- Son proceso no estacionarios. Pueden tener tendencias o ciclos según la diferenciación sea lineal o estacional. Una vez diferenciados hasta ser estacionarios, la parte estacionaria se comporta como un proceso ARMA estacional, es decir, tiene información del pasado de la propia variable pero también son aquellos que tienen memoria infinita, aunque solo recoge información de un numero finito de periodos. Esa información puede ser estacional o directa.
- La información de la variable está contenida en su propio pasado y en una serie de procesos innovativos (de ruido blanco) ocurridos en su propio pasado, hasta un determinado retardo, mas un ruido blanco, que mide la parte innovativa del período actual.

$$\Phi_p(L^s)\phi_p(L)\Delta^d\Delta_s^D x_t = \Theta_Q(L^s)\theta_q(L)\varepsilon_t$$

■ Ejemplos:

- Variables económicas con información del pasado como ventas combinadas, inflación, desempleo, etc...Cambios en los mercados con múltiples shocks

Análisis de los procesos $ARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s$

► Combina dos partes:

- La estacionaria, que se trata como un proceso ARMA estacional y verifica sus propiedades
- La no estacionaria que domina el comportamiento de la serie y es la que se observa en su representación. Puede ser tendencial o cíclica. Solo después de diferenciarla se observa el comportamiento ARMA

$(1-L)^d(1-L^s)^D$
Parte tendencial Parte cíclica

Orden de
diferenciación:
parte no
estacionaria

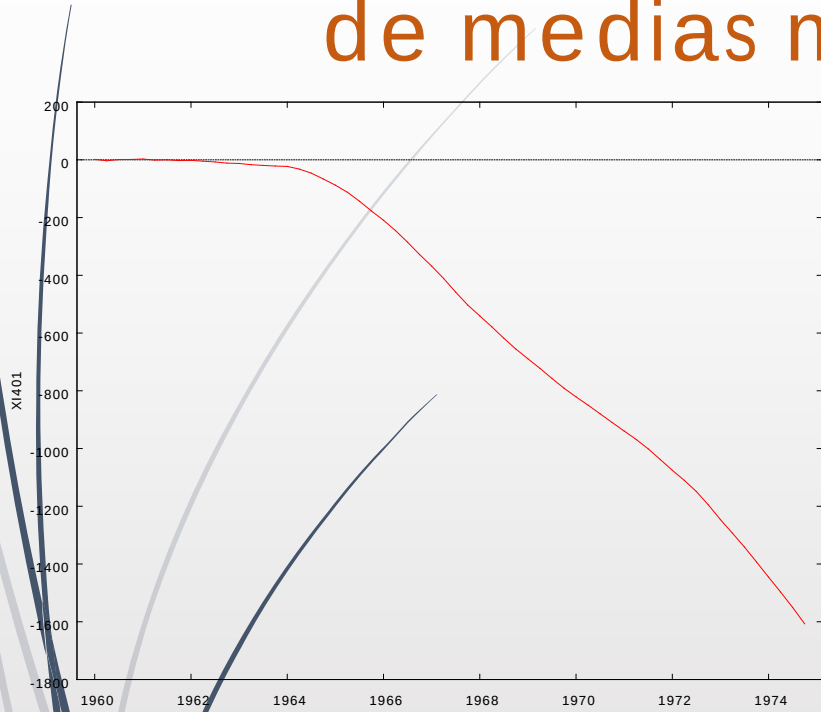
Parte irregular

$$(1 - \Phi_1 L^s - \dots - \Phi_P L^{sP})(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)x_t = (1 - \Theta_1 L^s - \dots - \Theta_Q L^{sQ})(1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q)\varepsilon_t$$

Proceso ARMA
estacional:
parte
estacionaria

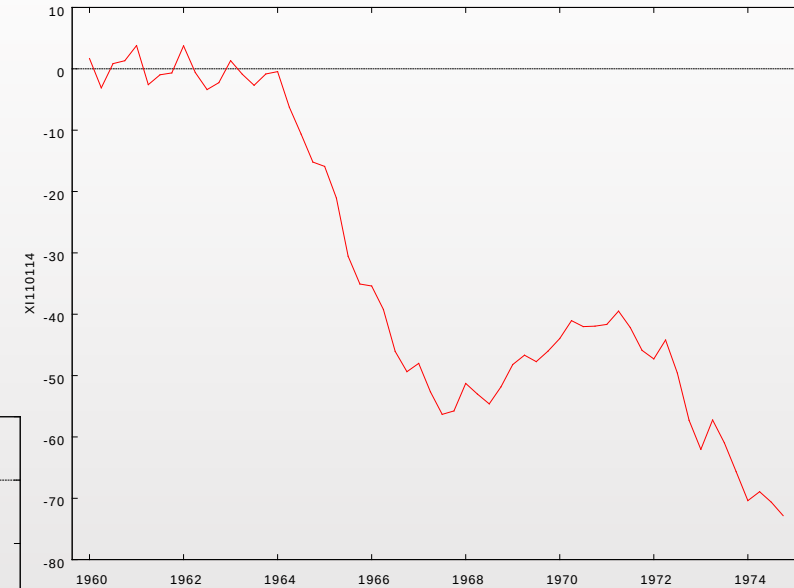
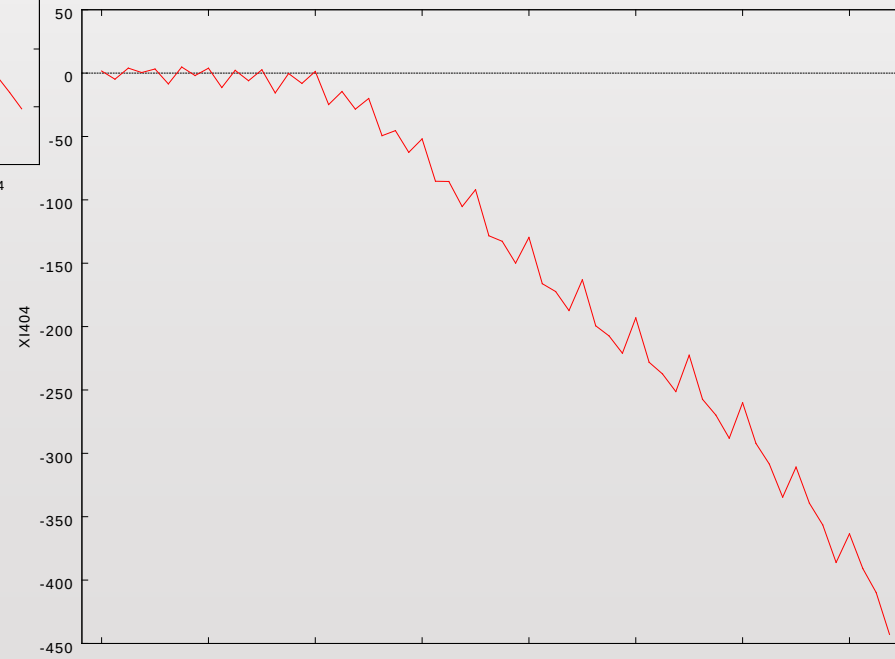
Parte
estacional

Gráficos de procesos integrados autorregresivos de medias móviles estacionales



ARIMA(0,2,0)(1,0,0)₄

ARIMA(0,1,0)(1,1,0)₄



ARIMA(0,1,0)(1,0,1)₄

Procesos $ARIMA(0,1,0)(1,0,0)_4$

Valores

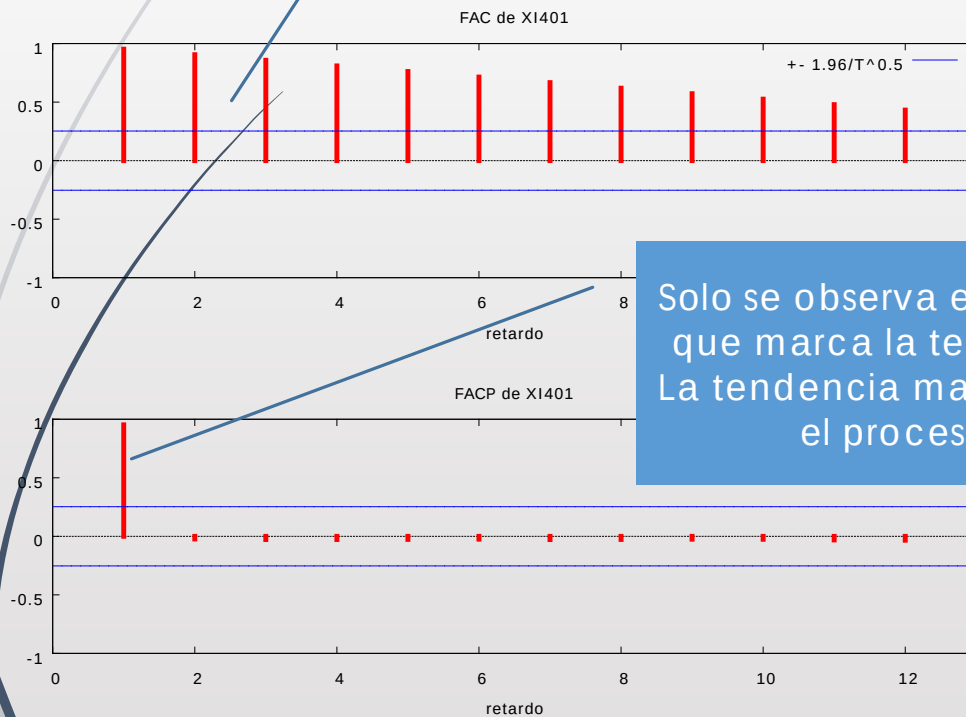
Función de autocorrelación para XI401

***, ** y * indica significatividad a los niveles del 1%, 5% y 10%

Utilizando desviación típica $1/T^{0.5}$

Funciones

Caída lineal

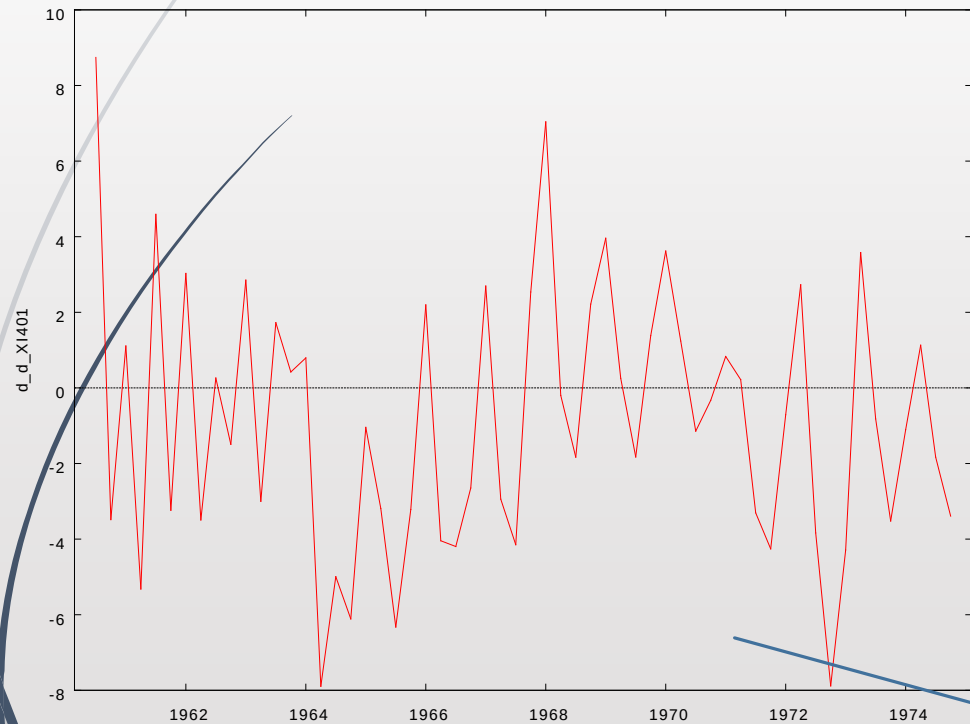


Solo se observa el primero que marca la tendencia
La tendencia marca todo el proceso

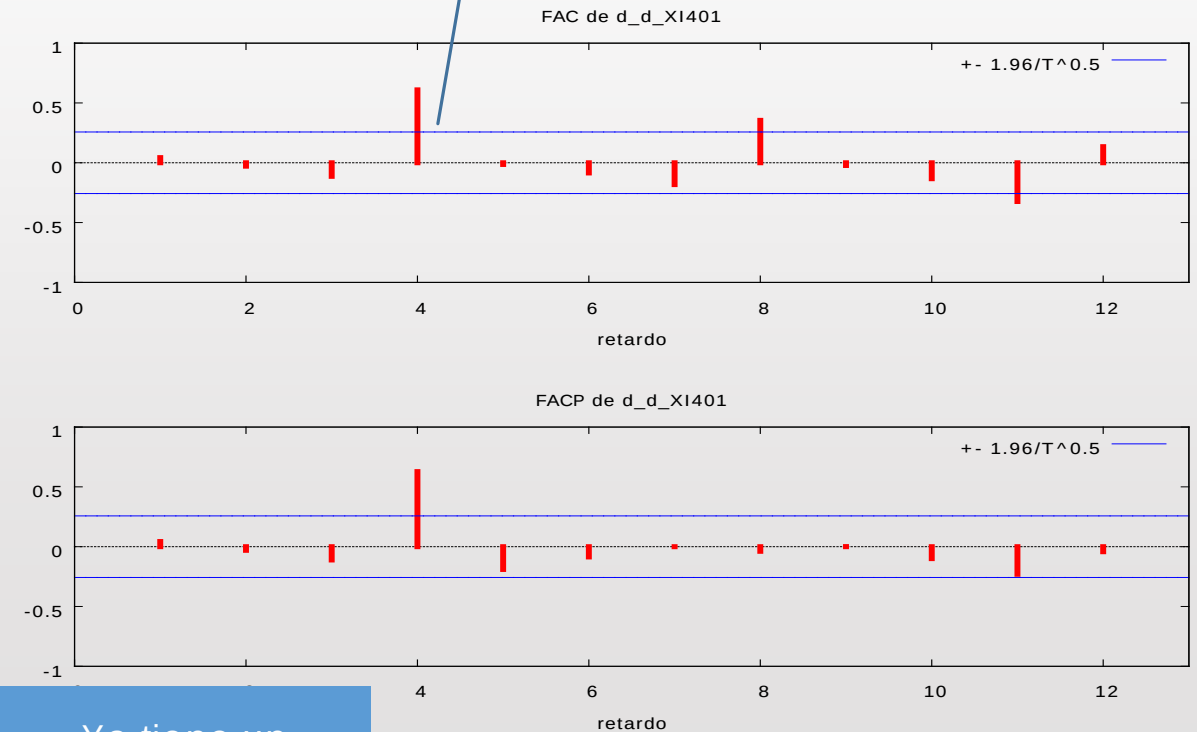
RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q. [valor p]
1	0.9525	***	0.9525	***	57.1991 [0.000]
2	0.9051	***	-0.0228		109.7381 [0.000]
3	0.8574	***	-0.0278		157.7163 [0.000]
4	0.8096	***	-0.0274		201.2549 [0.000]
5	0.7617	***	-0.0265		240.5011 [0.000]
6	0.7141	***	-0.0246		275.6347 [0.000]
7	0.6665	***	-0.0280		306.8161 [0.000]
8	0.6191	***	-0.0269		334.2315 [0.000]
9	0.5720	***	-0.0247		358.0981 [0.000]
10	0.5254	***	-0.0256		378.6341 [0.000]
11	0.4787	***	-0.0310		396.0314 [0.000]
12	0.4319	***	-0.0332		410.4870 [0.000]

Procesos $ARIMA(0,2,0)(1,0,0)_4$

Serie diferenciada dos veces



correlograma



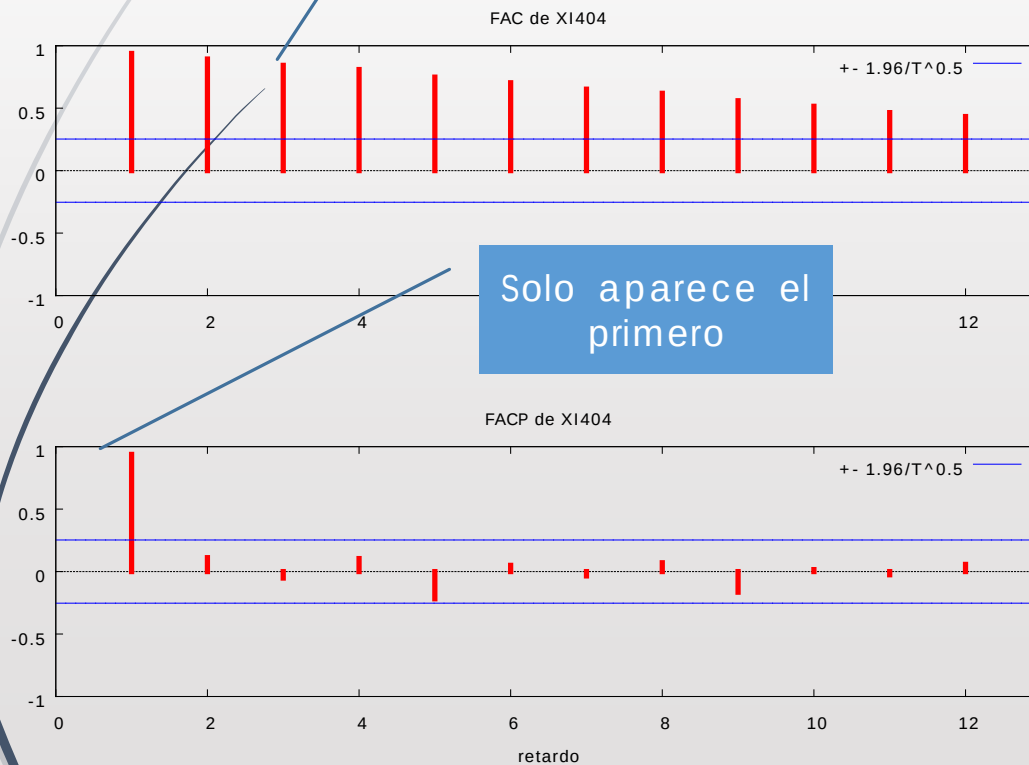
Se observa un comportamiento estacional de orden 4

Ya tiene un comportamiento estacionario

Procesos $ARIMA(0,1,0)(1,1,0)_4$

Funciones

La caída lineal



Solo aparece el primero

Valores

Función de autocorrelación para XI404

***, ** y * indica significatividad a los niveles del 1%, 5% y 10%

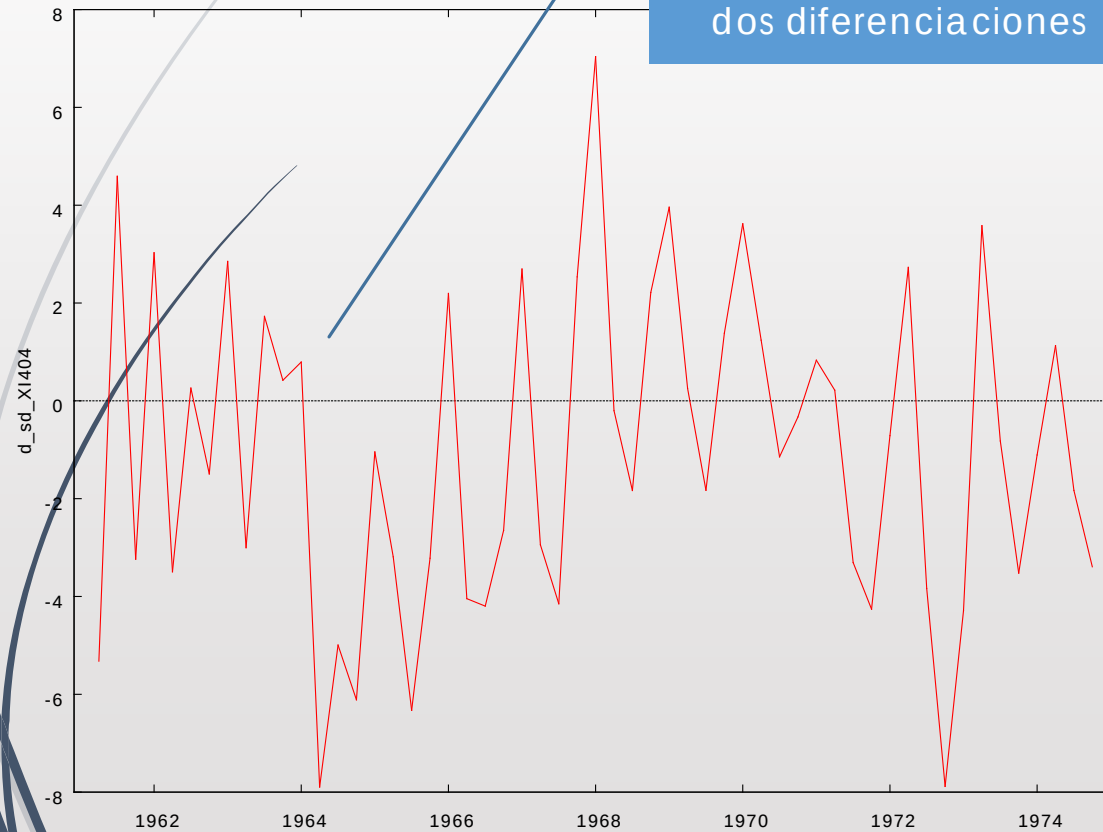
Utilizando desviación típica $1/T^{0.5}$

RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q. [valor p]
1	0.9381	***	0.9381	***	55.4876 [0.000]
2	0.8934	***	0.1117		106.6845 [0.000]
3	0.8431	***	-0.0521		153.0782 [0.000]
4	0.8096	***	0.1044		196.6137 [0.000]
5	0.7485	***	-0.2180	*	234.5079 [0.000]
6	0.7036	***	0.0500		268.6111 [0.000]
7	0.6524	***	-0.0347		298.4838 [0.000]
8	0.6192	***	0.0705		325.9144 [0.000]
9	0.5599	***	-0.1652		348.7790 [0.000]
10	0.5153	***	0.0159		368.5351 [0.000]
11	0.4646	***	-0.0258		384.9209 [0.000]
12	0.4334	***	0.0575		399.4773 [0.000]

Procesos $ARIMA(0,1,0)(1,1,0)_4$

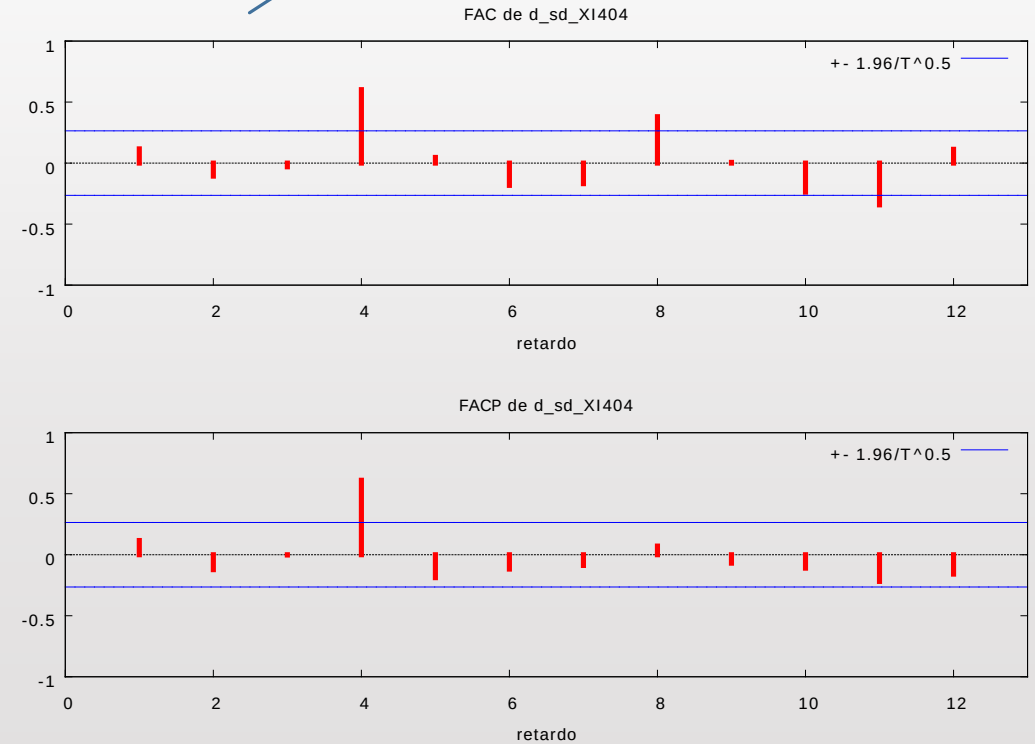
Funciones diferenciadas dos veces

Se observa la serie estacionaria después de dos diferenciaciones



Correlograma

Se observa el comportamiento estacional



Procesos $ARIMA(0,1,0)(1,0,1)_4$

Valores

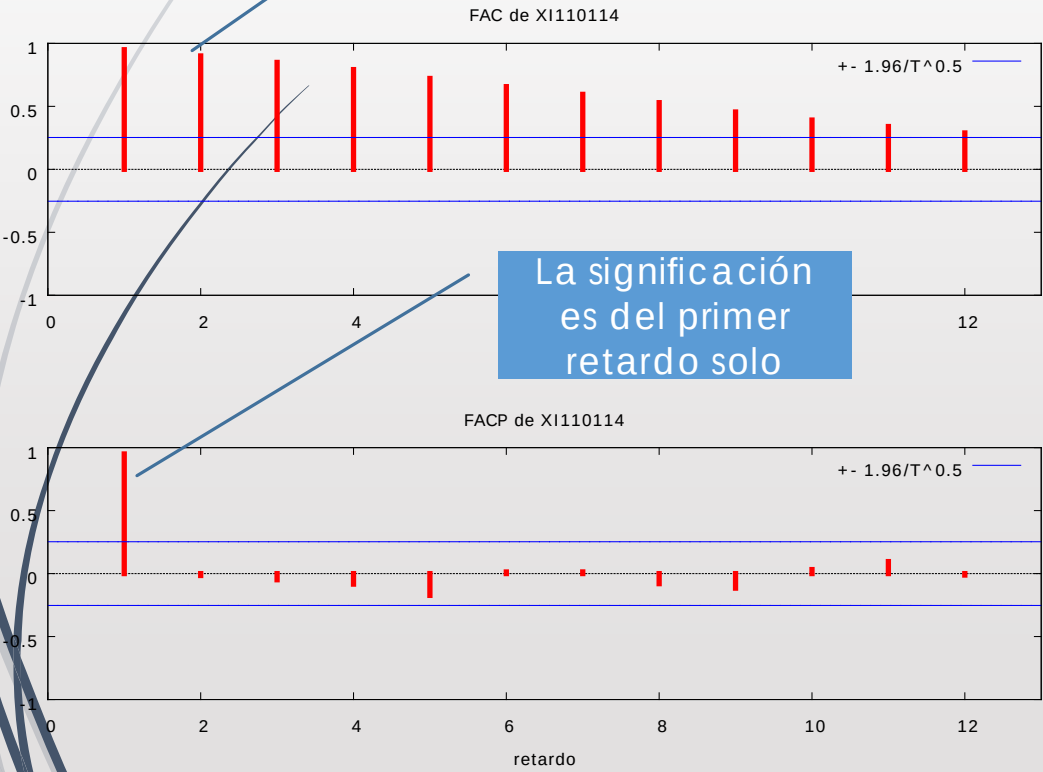
Función de autocorrelación para XI110114

***, ** y * indica significatividad a los niveles del 1%, 5% y 10%

Utilizando desviación típica $1/T^{0.5}$

Funciones

El descenso es lineal, domina la tendencia



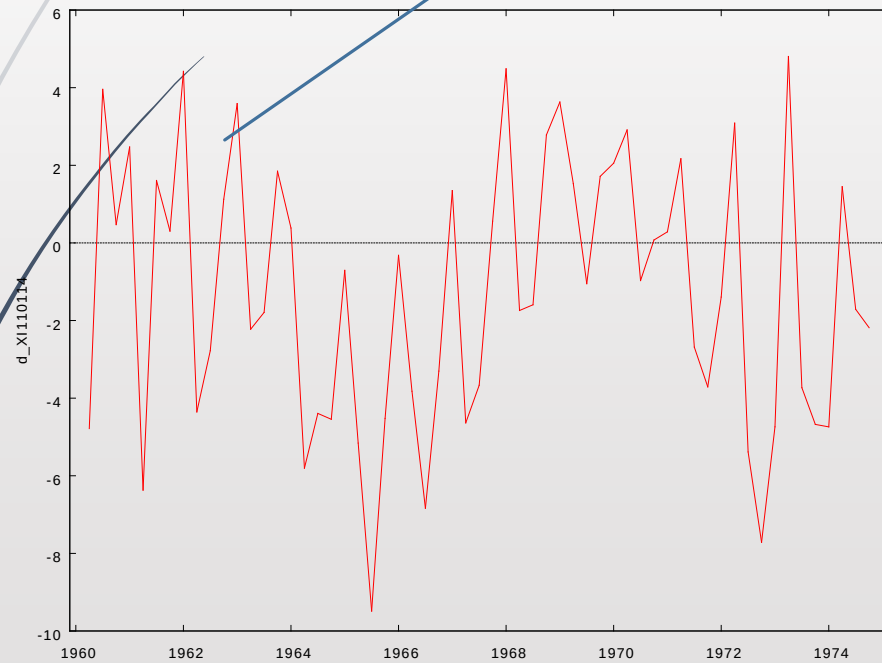
La significación es del primer retardo solo

RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q. [valor p]
1	0.9498	***	0.9498	***	56.8762 [0.000]
2	0.9006	***	-0.0154		108.8931 [0.000]
3	0.8491	***	-0.0491		155.9436 [0.000]
4	0.7922	***	-0.0837		197.6312 [0.000]
5	0.7217	***	-0.1732		232.8560 [0.000]
6	0.6567	***	0.0129		262.5605 [0.000]
7	0.5957	***	0.0132		287.4685 [0.000]
8	0.5295	***	-0.0801		307.5242 [0.000]
9	0.4556	***	-0.1158		322.6659 [0.000]
10	0.3915	***	0.0322		334.0697 [0.000]
11	0.3402	***	0.0954		342.8579 [0.000]
12	0.2890	**	-0.0117		349.3293 [0.000]

Procesos $ARIMA(0,1,0)(1,0,1)_4$

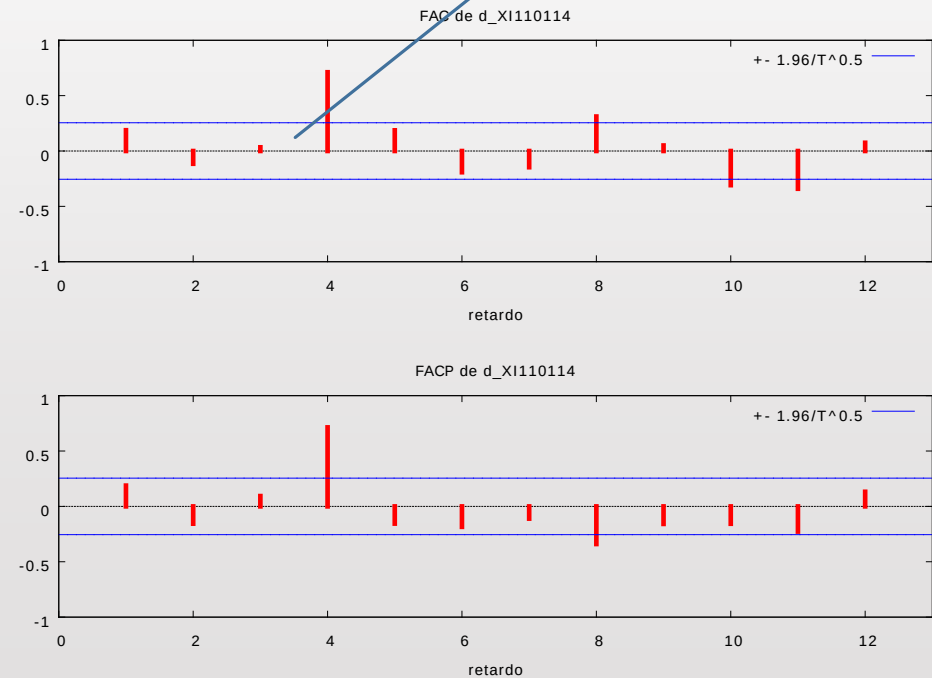
Funciones diferenciada

La serie se observa estacionaria



Correlograma

La significación es del cuarto retardo solo, indicando la parte estacional





Inferencia en series temporales

Estimación y test de hipótesis

Estimación en modelos ARMA

- La mayor parte de los parámetros se encuentran en la parte estacionaria del modelo, por tanto analizamos la estimación en procesos estacionarios
- En forma compacta, los procesos se escribían como

$$x_t - \mu = \psi(L)\varepsilon_t$$

- Por tanto los parámetros será μ y ψ .

Métodos de estimación

➤ 1. Método de mínimos cuadrados condicionales (CLS)

- Se suponen 0 todos los valores iniciales, ya que en grandes muestras apenas influye. Equivale a minimizar la función de logverosimilitud condicionada.
- En Gretl se hace con la opción conditional

➤ 2. Método de máxima verosimilitud (MLE)

- Busca estimar la función de verosimilitud exacta, para lo cual considera los valores iniciales como parámetros desconocidos. En este caso la función siempre es no lineal en los parámetros o en valores iniciales, por lo que los métodos de estimación serán iterativos. Según el tipo de método iterativo, pueden obtenerse distintos estimadores MLE, pero el más común es el método de Gauss-Newton (GN combinado con el algoritmo BHHH)
- En gretl sale por defecto

Propiedades de los estimadores

- Como los estimadores CLS y ULS ambos son asintóticamente equivalentes al ML tendrán la misma ley de distribución asintótica, por tanto, el estadístico

$$\sqrt{T}(\hat{\Psi} - \Psi)$$

- Seguirá una ley $AN(0, I^{-1}(\Psi))$

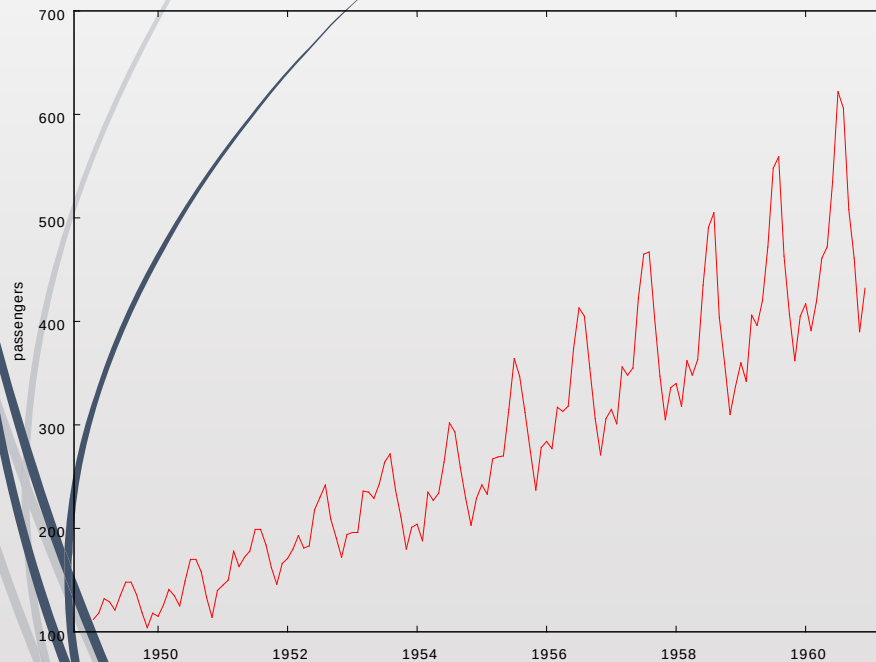
- siendo $I(\Psi)$ la matriz de información de Fisher $E\left(-\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \Psi \partial \Psi'}\right)$

- Como Ψ es desconocido $I(\Psi)$ se estima a partir del estimador obtenido directamente sustituyendo los parámetros por los parámetros estimados por alguno de los métodos anteriores, que es consistente.
- Además como la distribución normal es regular los estimadores serán O.A.N
 - Asintóticamente eficientes
 - Asintóticamente insesgados
 - Consistentes
 - Asintóticamente normales

Ejemplo: pasajeros mensuales en líneas aéreas en USA

Estimación de la serie transformada para ser estacionaria

Serie original



Evaluaciones de la función: 50
Evaluaciones del gradiente: 13

Modelo 2: ARMA, usando las observaciones 1950:
Estimado usando el filtro de Kalman (MW exacta)
Variable dependiente: sd_d_lg
Desviaciones típicas basadas en el Hessiano

Estimadores de los parámetros

	Coeficiente	Desv. Típica	z	Valor
const	4.95075e-05	0.00129526	0.03822	0.969
Phi_1	-0.474202	0.0797953	-5.943	2.80e
theta_1	-0.442297	0.0831877	-5.317	1.06e

Estimadores de la desviación estándar de los parámetros

Media de la vble. dep.	0.000291	D.T. de la vble. dep.	
media innovaciones	0.001214	D.T. innovaciones	
Log-verosimilitud	241.7000	Criterio de Akaike	-475.4000
Criterio de Schwarz	-463.8992	Crit. de Hannan-Quinn	-470.7267



Test en modelos ARMA

- Test de coeficientes individuales
 - Test de Wald
 - Test de Mann-Wald
- Test de coeficientes conjuntos
 - Test de Box-Pierce
 - Test de Ljung-Box-Pierce
- Test de especificación
 - Test LR
 - Test de Quenluille
 - Test LM

Test de Wald para coeficientes en modelos ARMA

■ Hipótesis $H_0: \Psi_i = \Psi_{0i}$

$$H_1 = \Psi_i \neq \Psi_{0i}$$

■ Estadístico

$$t_i = \frac{\sqrt{T}(\hat{\Psi}_i - \Psi_{0i})}{s_{\hat{\Psi}_i}}$$

siendo s_{y_i} la raíz cuadrada del elemento i-simo de la diagonal de la matriz de información de Fisher

■ Ley de distribución:

■ seguirá aproximadamente una ley normal tipificada.

Ejemplo: pasajeros mensuales en líneas aéreas en USA

Evaluaciones de la función: 50

Evaluaciones del gradiente: 13

Modelo 2: ARMA, usando las observaciones 1950:02-1960:12 (T = 131)

Estimado usando el filtro de Kalman (MV exacta)

Variable dependiente: sd_d_lg

Desviaciones típicas basadas en el Hessiano

	Coeficiente	Desv. Típica	z	Valor p
const	4.95075e-05	0.00129526	0.03822	0.9695
Phi_1	-0.474202	0.0797953	-5.943	2.80e-09 ***
theta_1	-0.442297	0.0831877	-5.317	1.06e-07 ***

Estadísticos de Wald
para contrastar
coeficientes

Cola de
probabilidad
para tomar la
decisión

Media de la vble. dep.	0.000291	D.T. de la vble. dep.	0.045848
media innovaciones	0.001214	D.T. innovaciones	0.037761
Log-verosimilitud	241.7000	Criterio de Akaike	-475.4000
Criterio de Schwarz	-463.8992	Crit. de Hannan-Quinn	-470.7267

Test de Mann-Wald para coeficientes de autocorrelación

- ▶ Hipótesis $H_0 : \rho = 0$
 $H_1 : \rho \neq 0$
- ▶ Estadístico $MW_j = \frac{\hat{r}_j}{sd(\hat{r}_j)}$

Siendo $sd(\hat{r}_j)$ calculado aproximadamente a partir de la fórmula de Barlett

$$var(\hat{r}_j) \cong \frac{1}{T} \left(1 + 2 \sum_{i=1}^j \hat{r}_i^2 \right)$$

y para T grande se aproxima por $1/T$, dándonos los intervalos de confianza de las funciones FAC y FACP $(-2/T, 2/T)$

- ▶ Ley de distribución:
 - ▶ seguirá aproximadamente una ley normal tipificada.

aerolineas

Estimadores de los
coeficientes

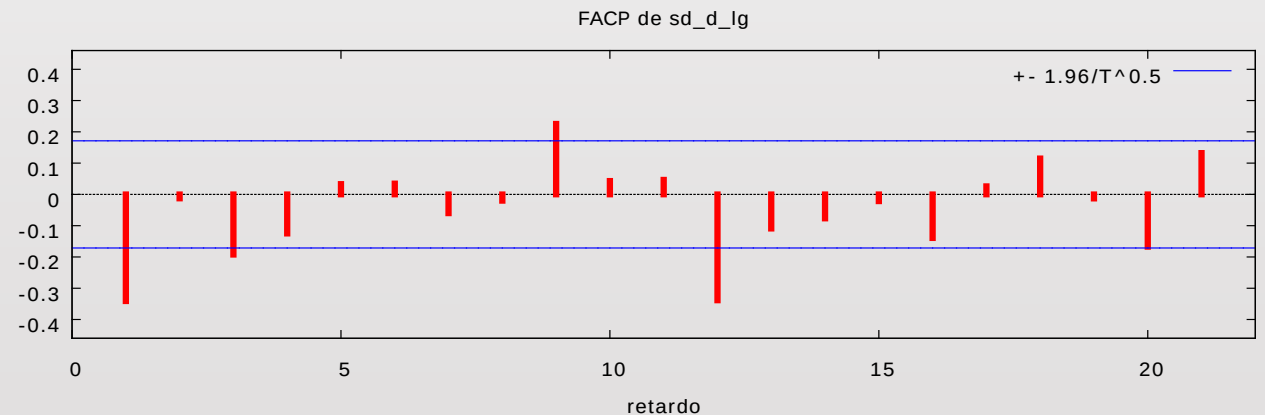
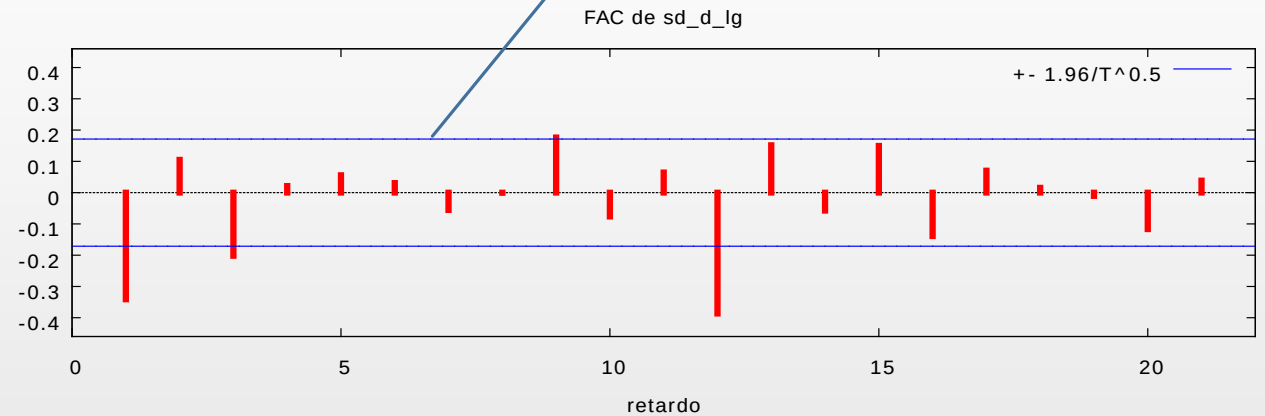
Intervalos de confianza, que
permiten decidir la
significación del test

Función de autocorrelación para sd_d_lg

***, ** y * indica significatividad a los niveles del 1%, 5% y 10%

Utilizando desviación típica $1/\sqrt{T}$

RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q. [valor p]
1	-0.3411	***	-0.3411	***	15.5957 [0.000]
2	0.1050		-0.0128		17.0860 [0.000]
3	-0.2021	**	-0.1927	**	22.6478 [0.000]
4	0.0214		-0.1250		22.7104 [0.000]
5	0.0557		0.0331		23.1387 [0.000]
6	0.0308		0.0347		23.2709 [0.001]
7	-0.0556		-0.0602		23.7050 [0.001]
8	-0.0008		-0.0202		23.7050 [0.003]
9	0.1764	**	0.2256	***	28.1473 [0.001]
10	-0.0764		0.0431		28.9869 [0.001]
11	0.0644		0.0466		29.5887 [0.002]
12	-0.3866	***	-0.3387	***	51.4728 [0.000]
13	0.1516	*	-0.1092		54.8664 [0.000]
14	-0.0576		-0.0768		55.3605 [0.000]
15	0.1496	*	-0.0218		58.7204 [0.000]
16	-0.1389		-0.1395		61.6452 [0.000]
17	0.0705		0.0259		62.4045 [0.000]
18	0.0156		0.1148		62.4421 [0.000]
19	-0.0106		-0.0132		62.4596 [0.000]
20	-0.1167		-0.1674	*	64.5984 [0.000]
21	0.0386		0.1324		64.8338 [0.000]



Test de Box-Pierce para contrastar correlaciones conjuntas

- Hipótesis $H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_k = 0$
 $H_1 : \text{Existe al menos un } i = 1 \dots k / \rho_i \neq 0$
- Estadístico $P = T \sum_{j=1}^k r_j^2$
- Ley de distribución:
 - seguirá aproximadamente una chi cuadrado con $k-p-q$ grados de libertad, siendo p y q los ordenes del proceso ARMA.

Test de Ljung-Box-Pierce para contrastar correlaciones conjuntas

- Hipótesis $H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_k = 0$
 $H_1 : \text{Existe al menos un } i = 1 \dots k / \rho_i \neq 0$

- Estadístico

$$Q = T(T + 2) \sum_{j=1}^k \frac{r_j^2}{T - j}$$

- Ley de distribución:
 - seguirá aproximadamente una chi cuadrado con $k-p-q$ grados de libertad, siendo p y q los ordenes del proceso ARMA.
- Similar al anterior pero corrige el estadístico par muestras mas pequeñas

aerolineas

Función de autocorrelación para sd_d_lg

***, ** y * indica significatividad a los niveles del 1%, 5% y 10%

Utilizando desviación típica $1/T^{0.5}$

RETARDO	FAC		FACP		Estad-Q. [valor p]
1	-0.3411	***	-0.3411	***	15.5957 [0.000]
2	0.1050		-0.0128		17.0860 [0.000]
3	-0.2021	**	-0.1927	**	22.6478 [0.000]
4	0.0214		-0.1250		22.7104 [0.000]
5	0.0557		0.0331		23.1387 [0.000]
6	0.0308		0.0347		23.2709 [0.001]
7	-0.0556		-0.0602		23.7050 [0.001]
8	-0.0008		-0.0202		23.7050 [0.003]
9	0.1764	**	0.2256	***	28.1473 [0.001]
10	-0.0764		0.0431		28.9869 [0.001]
11	0.0644		0.0466		29.5887 [0.002]
12	-0.3866	***	-0.3387	***	51.4728 [0.000]
13	0.1516	*	-0.1092		54.8664 [0.000]
14	-0.0576		-0.0768		55.3605 [0.000]
15	0.1496	*	-0.0218		58.7204 [0.000]
16	-0.1389		-0.1395		61.6452 [0.000]
17	0.0705		0.0259		62.4045 [0.000]
18	0.0156		0.1148		62.4421 [0.000]
19	-0.0106		-0.0132		62.4596 [0.000]
20	-0.1167		-0.1674	*	64.5984 [0.000]
21	0.0386		0.1324		64.8338 [0.000]c

Estadístico de Ljung-Box-
Pierce para cada
retardo

Test LR para inclusión o eliminación de parámetros en los modelos ARMA

- Hipótesis $H_0 : \theta_m = \dots = \theta_{m-r} = 0$
 $H_1 : \text{Existe al menos un } i = 0 \dots r / \theta_{m-i} \neq 0$

- Estadístico

$$LR = -2(\ln L_{m-j}(\theta) - \ln L_m(\theta)) = T(\ln \sigma_{m-j}^2 - \ln \sigma_m^2) \quad j = 1..r$$

- Ley de distribución:
 - seguirá aproximadamente una chi cuadrado con j grados de libertad.
- Este test se suele hacer de modo secuencial, incrementando i desde 0 hasta r.

Test LR en Gretl

- ▶ Este test no sale directamente, pero se tienen las funciones de verosimilitud y puede calcularse muy fácilmente.
- ▶ Por ejemplo, para comparar un modelo ARMA(1,1) (1,0)₁₂ con uno ARMA (1,0) (1,0)₁₂
- ▶ Instrucciones

```
# modelo 2
arima 0 0 1 ; 1 0 0 ; sd_d_lg
scalar lnL_2 = $lnl
# modelo 3
arima 1 0 1 ; 1 0 0 ; sd_d_lg
scalar lnL_3 = $lnl
genr LR=2*(lnL_3-lnL_2)
genr p1=cdf(c,1,LR)
```

? scalar lnL_3 = \$lnl

Se ha reemplazado el escalar lnL_3 = 241.73

? genr LR=2*(lnL_3-lnL_2)

Se ha reemplazado el escalar LR = 0.0609429

? genr p1=cdf(c,1,LR)

Se ha generado el escalar p1 = 0.194988

Test de raíces unitarias

- ▶ Las raíces unitarias se presentan cuando el parámetro que correspondería al modelo AR(1) vale exactamente 1 y por tanto se da una diferenciación en la serie.
- ▶ En consecuencia tendríamos una serie $I(1)$ y por lo tanto no estacionaria, por lo que no se podría aplicar la metodología utilizada con los modelos ARMA.
- ▶ En este caso se genera una tendencia estocástica y la ley de distribución de la serie no estará determinada directamente por la normalidad de los errores, por no ser estacionaria, pues la varianza cambiará a lo largo del tiempo
- ▶ Tipos
 - ▶ Test de Dickey –Fuller ampliado (ADF)
 - ▶ Analiza si la serie tiene efecto del periodo anterior con un impacto superior a 1.
 - ▶ Test ADF-GLS
 - ▶ Como el anterior pero estima por GLS
 - ▶ Test de Kwiatkowski, Phillips, Schmidt and Shin (KPSS)
 - ▶ Estima en función de las varianzas

Modelo del test ADF de raíces unitarias

- En realidad queremos contrastar la existencia de raíces unitarias contra la hipótesis de estar trabajando con modelos AR(p).

$$\Delta y_t = f(t) + \phi y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \gamma_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t$$

donde $f(t)$ representa en general una tendencia determinística (que puede ser 0) y ε_t es un ruido blanco gaussiano $(0, \sigma^2)$.

- Si f es igual a cero existiría una raíz unitaria, puesto que la serie diferenciada sería estacionaria
- Según sea la función $f(t)$ caben diferentes opciones del test
 - Sin tendencia determinística ni deriva
 - Sin tendencia determinística con deriva
 - Con tendencia determinística y deriva
 - Tendencia lineal
 - Tendencia cuadrática

Test ADF de raíces unitarias

- ▶ Hipótesis $H_0 : \phi = 0$
 $H_1 : \phi < 0$
- ▶ Estadístico

$$Z_\phi = \frac{\hat{\phi}}{s_\phi}$$

Siendo $sd(\phi_i)$ calculado en la regresión sobre la serie y para T grande se aproxima por $1/T$,

- ▶ Ley de distribución:
 - ▶ seguirá una ley propia tabulada por Mc Kinnon



Procedimiento general de contraste

- Siguiendo la metodología propuesta por Mizon(1977) empezamos con el modelo más completo, y vamos eliminando parámetros a medida que vemos que no son significativos.
- El hecho de que el test de D-F sea potente, únicamente para la alternativa $AR(1)$, pero muy poco para cualquier otra nos lleva a una estrategia de selección basada en la posibilidad de aceptar H_0 por falta de potencia.
- Los Z-test, definidos anteriormente, sólo son válidos para alternativas $AR(1)$, por ello en la estrategia de selección que será generalizable a cualquier otro caso haremos únicamente referencia a los t-test, sabiendo que estos pueden sustituirse por los Z-test en el caso indicado anteriormente.

Procedimiento general de contraste

1. Calculamos F_3 y $t(rc)$ para contrastar las raíces unitarias, cuando hay pendiente. Si los dos tests se rechazan existe pendiente determinística lineal, pero no hay raíz unitaria.
2. Calculamos $t(bc)$ para contrastar si existe pendiente determinística lineal.
 - 2a) En caso de que se rechace, entonces b es significativo. Entonces utilizamos $t(rc)$ para contrastar las raíces unitarias, pero ahora utilizando una distribución asintóticamente normal. Si se rechaza, existe sólo pendiente determinística lineal; en otro caso existen raíces unitarias además de pendiente determinística lineal.
 - 2b) En caso de que no se rechace, entonces b es no significativo. Por lo tanto no existe pendiente en la ecuación, y en consecuencia pasamos al segundo modelo, en el que sólo hay constante.

Procedimiento general de contraste

3. Entonces utilizamos $t(rb)$ y $F2$ para contrastar conjuntamente que existe constante determinística y raíces unitarias. Si ambas se rechazan el proceso es $AR(1)$ con constante. En otro caso puede ocurrir que no se haya rechazado por falta de potencia por lo que comprobamos las hipótesis una a una.
4. Calculamos $t(ab)$ para contrastar la existencia de deriva. Entonces pueden ocurrir dos casos:
 - 4a) Si se rechaza que la deriva es 0 entonces se contrastan de nuevo las raíces unitarias con $t(rb)$, pero ahora utilizando una distribución asintóticamente normal. Si se rechaza, existe sólo deriva determinística; en otro caso existen raíces unitarias además en otro caso existen raíces unitarias además de deriva determinística.
 - 4b) Si $t(ab)$ no se rechaza, entonces quiere decir que a no es significativo, por lo que pasaríamos al modelo sin deriva.

Procedimiento general de contraste

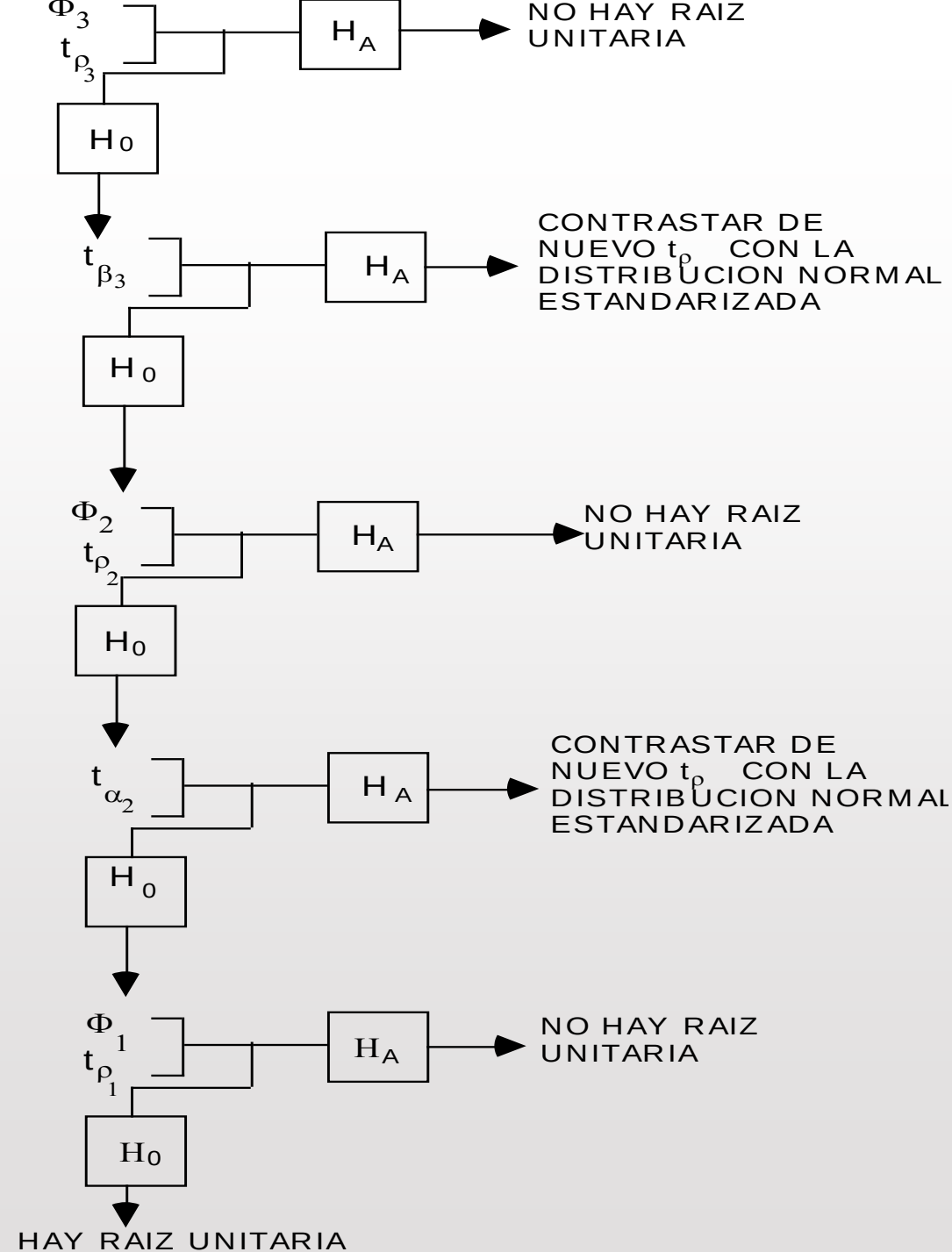
5. Sin embargo puede ocurrir que no se rechace por falta de potencia por lo que para comprobarlo contrastamos conjuntamente la existencia raíces unitarias sin deriva. Para ello utilizamos $t(r_a)$ y $F1$. Si ambas se rechazan el proceso es $AR(1)$ sin constante. En otro caso puede ocurrir que no se haya rechazado por falta de potencia por lo que comprobamos las hipótesis independientemente.
- 5a). Si $F1$ se rechaza pero $t(r_a)$ no, para asegurarnos de la existencia de raíces unitarias podemos volver a utilizar $t(r_b)$, considerando una ley asintóticamente normal. Si no se rechaza entonces quiere decir que el proceso tiene raíces unitarias sin constante, por lo que tendrá tendencia estocástica únicamente.
 - 5b). Si $t(r_b)$ se rechaza entonces quiere decir que el proceso puede no tener raíces unitarias con constante, por lo que suele ser conveniente realizar una regresión paso a paso para ver si la constante entra primero que la variable retardada.
 - 5c) Si $F1$ no se rechaza pero $t(r_a)$ si, entonces quiere decir que el proceso no tiene raíces unitarias, y no presenta ni tendencia ni deriva.
 - 5d) Si no se rechaza ninguno de los dos, entonces quiere decir que el proceso tiene raíces unitarias, pero no presenta ni tendencia ni deriva.

Estrategia si
no esta
especificado
el modelo

Ecuación con deriva y
tendencia determinísticas

Ecuación con deriva y sin
tendencia determinísticas

Ecuación sin deriva y sin
tendencia determinísticas



Test ADF en líneas aéreas

No se
rechaza
ninguno,
existe raíz
unitaria

Contraste aumentado de Dickey-Fuller para lg
incluyendo 10 retardos de $(1-L)lg$
(el máximo fue 10, el criterio AIC)
tamaño muestral 133
hipótesis nula de raíz unitaria: $a = 1$

contraste sin constante

modelo: $(1-L)y = (a-1)*y(-1) + \dots + e$

valor estimado de $(a - 1)$: 0.00965475

Estadístico de contraste: $\tau_{nc}(1) = 8.17613$

valor p asintótico 1

Coef. de autocorrelación de primer orden de e: -0.311

diferencias retardadas: $F(10, 122) = 25.343 [0.0000]$

contraste con constante

modelo: $(1-L)y = b_0 + (a-1)*y(-1) + \dots + e$

valor estimado de $(a - 1)$: -0.0220302

Estadístico de contraste: $\tau_c(1) = -1.57824$

valor p asintótico 0.4938

Coef. de autocorrelación de primer orden de e: -0.353

diferencias retardadas: $F(10, 121) = 25.265 [0.0000]$

con constante y tendencia

modelo: $(1-L)y = b_0 + b_1*t + (a-1)*y(-1) + \dots + e$

valor estimado de $(a - 1)$: -0.167196

Estadístico de contraste: $\tau_{ct}(1) = -1.32322$

valor p asintótico 0.882

Coef. de autocorrelación de primer orden de e: -0.333

diferencias retardadas: $F(10, 120) = 20.808 [0.0000]$

Test ADF-GLS de raíces unitarias

- Es como el anterior pero cambia el método de estimación de los parámetros siendo mas robusto a falsas especificaciones

- Hipótesis $H_0 : \phi = 0$
 $H_1 : \phi < 0$

- Estadístico

$$Z_\phi = \frac{\hat{\phi}}{s_\phi}$$

Siendo $sd(\phi)$ calculado en la regresión sobre la serie y para T grande se aproxima por $1/T$,

- Ley de distribución:
 - seguirá una ley propia tabulada por Mc Kinnon

Test en líneas aéreas

Contraste aumentado de Dickey-Fuller (GLS) para I_g
incluyendo 10 retardos de $(1-L)I_g$
(el máximo fue 10, el criterio AIC modificado, Perron-Qu)
tamaño muestral 133
hipótesis nula de raíz unitaria: $\alpha = 1$

con constante y tendencia
modelo: $(1-L)y = b_0 + b_1*t + (\alpha-1)*y(-1) + \dots + e$
valor estimado de $(\alpha - 1)$: -0.0810013
Estadístico de contraste: $\tau = -0.90419$

	10%	5%	2.5%	1%
Valores críticos:	-2.64	-2.93	-3.18	-3.46

Coef. de autocorrelación de primer orden de e : -0.321
diferencias retardadas: $F(10, 122) = 21.062$ [0.0000]

Contraste aumentado de Dickey-Fuller (GLS) para I_g
incluyendo 10 retardos de $(1-L)I_g$
(el máximo fue 10, el criterio AIC modificado, Perron-Qu)
tamaño muestral 133
hipótesis nula de raíz unitaria: $\alpha = 1$

contraste con constante
modelo: $(1-L)y = b_0 + (\alpha-1)*y(-1) + \dots + e$
valor estimado de $(\alpha - 1)$: 0.0491144
Estadístico de contraste: $\tau = 4.86726$
valor p asintótico 1
Coef. de autocorrelación de primer orden de e : -0.089
diferencias retardadas: $F(10, 122) = 16.963$ [0.0000]

No se rechaza ninguno, existe
raíz unitaria

Test KPSS de raíces unitarias

- Este test parte de suponer que el proceso es estacionario, en cuyo caso, el estimador de la media es consistente y la varianza es finita.

- Hipótesis H_0 : *El proceso es estacionario*
 H_1 : *El proceso no es estacionario*

- Estadístico

$$\eta = \frac{\sum_{t=1}^T S_t^2}{T^2 \hat{\sigma}^2}$$

Siendo $S_t = \sum_{s=1}^t e_s$ y $\hat{\sigma}^2$ un estimador de la varianza de $e_t = y_t - \hat{y}_t$, estimada por

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=-m}^m \left(1 - \frac{|i|}{m+1}\right) \hat{\gamma}_i,$$

siendo estas ultimas las autocovarianzas de e_t

- Ley de distribución:
 - Bajo la hipótesis nula el estadístico sigue una distribución no estándar tabulada por Shelton, pero bajo la alternativa diverge.
 - Se pueden considerar dos opciones:
 - Sin tendencia determinística
 - Con tendencia determinística

Test en líneas aéreas

Contraste KPSS para I_g

$T = 144$

Parámetro de truncamiento de los retardos
 $= 4$

Estadístico de contraste = 2.82867

10% 5% 1%

Valores críticos: 0.349 0.462 0.737

Valor $p < .01$

Contraste KPSS para I_g (incluyendo
tendencia)

$T = 144$

Parámetro de truncamiento de los retardos
 $= 4$

Estadístico de contraste = 0.112673

10% 5% 1%

Valores críticos: 0.120 0.148 0.216

Valor $p > .10$

No se rechaza ninguno, existe
raíz unitaria